LICENCE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

TROISIÈME ANNÉE

PARCOURS MATHÉMATIQUES

Unité d'enseignement LMI 5.35

GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE CLASSIQUE

par G. MATHIEU et G. ROUSSEAU

Université Henri Poincaré Nancy 1
Département de Mathématiques

SOMMAIRE

PREMIÈRE PARTIE: GÉOMÉTRIE PLANE AXIOMATIQUE

I Fondements de la géométrie 1
§1 Les axiomes d'ordre 1
§2 Les axiomes de congruence 7

II Parallélisme 19
§3 L'axiome de continuité 19
§4 Le théorème de Sachieri-Legendre 24
§5 Le postulat d'Euclide 28

III La structure d'espace vectoriel 38
§6 Symétries, isométries 38
§7 Les vecteurs 50
§8 Le corps de la géométrie 55

SECONDE PARTIE: GÉOMÉTRIE PLANE CLASSIQUE

I Les angles 67
§1 Le groupe des rotations vectorielles du plan 67
§2 Les angles orientés 67
§3 Exemples d'applications 69
§4 La mesure des angles 71
§5 Angles non orientés 71
§6 Autres points de vue 71
§7 Angles de l'espace 72
II Transformations du plan 73
§0 Applications affines 73
§1 Homothéties et translations 74
§2 Isométries 76
§3 Similitudes 80
III Résultats de géométrie élémentaire 85
§1 Le triangle 85
§2 Le cercle et les faisceaux de cercle 86
§3 L'inversion dans le plan 88
§4 Points alignés, droites concourantes 89
IV Homographies et géométrie hyperbolique 91
§1 Définitions, premières propriétés 91
§2 Homographies et birapport 91
§3 Points fixes d'une homographie 92
§4 Homographies et géométrie de Poincaré 94
V Quelques résultats sur les coniques (formulation géométrique) 97
§1 Définitions 97
§2 L'ellipse 97
§3 L'hyperbole 98
§4 La parabole 98
§5 Les théorèmes belges (Dandelin et Quetelet) 99
VI Étude analytique des coniques 100
§1 La parabole 100
§2 L'ellipse 101
§3 L'hyperbole 105
§4 Paramétrage général des coniques en coordinnées polaires 109
§5 L'équation générale des coniques 109

PREMIÈRE PARTIE: GÉOMÉTRIE PLANE AXIOMATIQUE

I - FONDEMENTS DE LA GEOMETRIE

§ 1 - LES AXIOMES D'ORDRE

On se place dans un ensemble $\mathbb{P}$ dont les éléments seront appelés points. $\mathbb{P}$ est muni d'une relation ternaire notée [A,B,C]. (Dans les modèles, [A,B,C] signifie que B est entre A et C).

Les axiomes suivants sont vérifiés :

O1 **Il y a au moins deux points.**
O2 **Si A et B sont deux points distincts, il existe C tel que [A,B,C].**
O3 **Si [A,B,C] alors $A \neq C$.**
O4 **Si [A,B,C] alors [C,B,A] et $\neg$[B,C,A].**

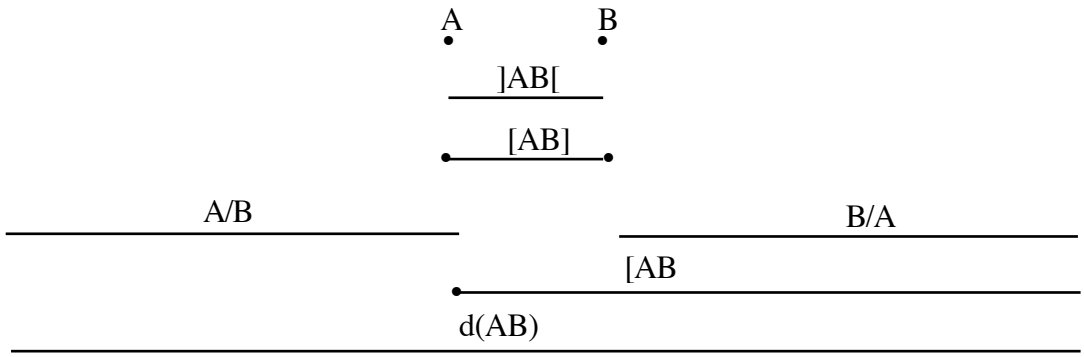
Remarques :

1) Si [A,B,C] alors $\neg$[C,A,B]
car [C,A,B] $\Rightarrow$ $\neg$[A,B,C].

2) Si [A,B,C] alors $A \neq B$, $A \neq C$, $B \neq C$
(car si $B = C$ par exemple : [A,B,B] $\Rightarrow$ [B,B,A] et $\neg$[B,B,A].

Définitions *: Pour $A \neq B$.*

1) *L'**intervalle**]AB[est l'ensemble des points C tels que [A,C,B].*
2) *Le **segment** [AB] est l'ensemble]AB[$\cup$ {A} $\cup$ {B}.*
3) *Le **rayon** A/B est l'ensemble {C | [C,A,B]}.*
4) *La **demi-droite** [AB est l'ensemble [AB] $\cup$ (B/A).*
5) *La **droite** (AB) = d(AB) est l'ensemble A/B $\cup$ [A B] $\cup$ B/A.*



Remarques :

3) $A,B \notin]AB[$.

4) $]AB[=]BA[$ (à cause de O4) ; $[AB] = [BA]$, $d(AB) = d(BA)$.

O5 Soit $C \neq D$, $C,D \in d(AB)$. Alors $A \in d(CD)$.

Théorème 1.1

Si $A \neq B$, $C \neq D$, $C,D \in d(AB)$, alors $d(AB) = d(CD)$.

Démonstration :

1er cas : les points ne sont pas tous distincts, par exemple $D = B$. On doit montrer $d(AB) = d(CB)$.

Soit $X \in d(BC)$.

$$\begin{cases} C \in d(AB) \\ B \in d(AB) \end{cases} \Rightarrow A \in d(BC),$$

$$\begin{cases} A \in d(BC) \\ X \in d(BC) \end{cases} \Rightarrow B \in d(AX),$$

$$\begin{cases} B \in d(AX) \\ A \in d(AX) \end{cases} \Rightarrow X \in d(AB),$$

Ainsi $d(BC) \subset d(AB)$. Comme les données sont symétriques (à cause de O5) on a le résultat.

2ème cas : les points sont distincts 2 à 2

$$C,B \in d(AB) \Rightarrow d(AB) = d(BC),$$

$$C,D \in d(AB) = d(BC) \Rightarrow d(CD) = d(BC).$$

D'où le résultat.

Corollaire 1.2

Deux points distincts sont sur une seule droite. Si deux droites sont distinctes elles ont au plus un point en commun.

Corollaire 1.3

Si A, B, C sont trois points distincts 2 à 2 sur une même droite, ils vérifient une et une seule parmi les relations [A,B,C], [B,C,A], [C,A,B].

O6 Si d(AB) est une droite, il existe $C \notin d(AB)$.

Proposition 1.4

Si $C \notin d(AB)$ alors $B \notin d(AC)$, $A \notin d(BC)$, les trois droites d(AB), d(BC), d(CA) sont distinctes 2 à 2.

L'axiome O6 indique que la géométrie étudiée n'est pas incluse dans une droite. On peut prolonger ceci comme suit.

Définition

Si A, B, C sont trois points non colinéaires le ***triangle*** *ABC est l'ensemble $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$. (A, B, C sont les sommets ; [AB], [BC], [CA] les côtés).*

Définition

Si A, B, C sont trois points non colinéaires, le plan p(A,B,C) est l'ensemble de tous les points colinéaires aux couples de points appartenant aux côtés de ABC.

O7 Il existe trois points A, B, C non colinéaires de $\mathbb{P}$ tels que tous les points sont dans le plan p(ABC).

On se limite ainsi à une géométrie de "dimension" deux. On pourrait introduire un axiome O7' : "Il existe un point n'appartenant pas au plan p(ABC)". On pourrait alors définir des tétraèdres, l' "espace" (de "dimension" trois) engendré par un tétraèdre ...

O8 Si ABC est un triangle, si une droite d coupe]AB[elle coupe [AC] ou [BC].

Remarques :

5) Si d ∌ C, d ne peut couper qu'un seul de ces deux segments (trois points alignés ne peuvent appartenir aux trois côtés d'un triangle).

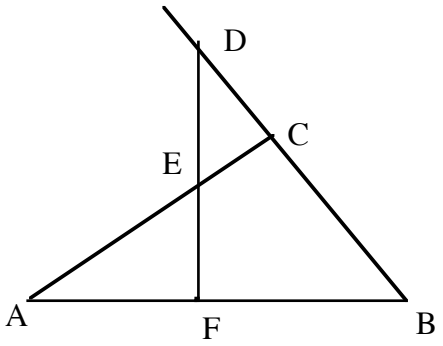
Théorème 1.5

Soit un triangle ABC.

a) Soient D et E deux points tels que [B,C,D] et [C,E,A].
Alors il existe F ∈ d(DE) tel que [A,F,B] et [D,E,F].

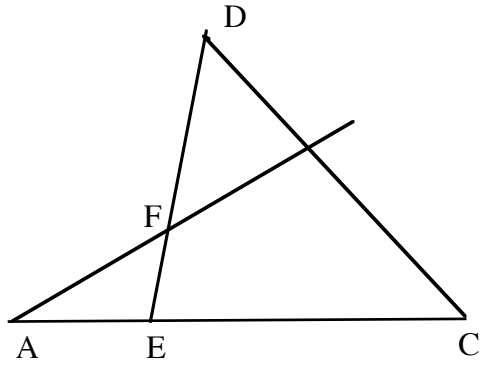
b) Soient G et H deux points tels que [A,G,B] et [B,C,H]. Alors il existe J ∈ d(GH) tel que [A,J,C] et [H,J,G].

Démonstration

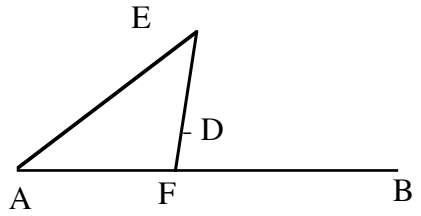


a) La droite d(DE) coupe]AC[donc elle coupe [BC] ou [AB]. Elle ne peut couper]BC[donc elle coupe]AB[car elle ne peut passer ni par A ni par B. Donc il existe F, F ∈ d(DE) et [A,F,B].

Comme F ∈ d(DE), F ∈ [ED] ou F ∈ E/D ou F ∈ D/E.



Si F ∈ [ED] alors F ∈]ED[.
On applique ce qui vient d'être démontré au triangle ECD. On a [AEC] et [EFD]. Donc d(AF) coupe]CD[en un point qui ne peut être que B et c'est impossible.



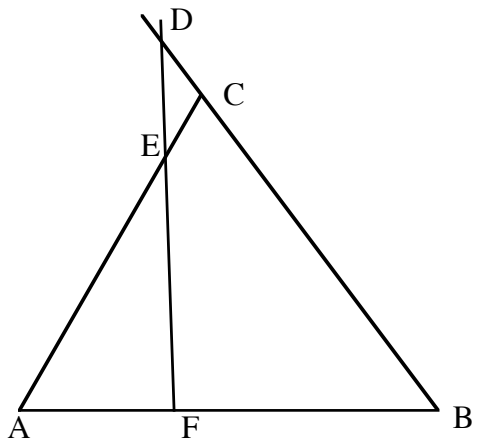
Si [E,D,F], comme on a [A,F,B] en appliquant ce qui précède au triangle AFE, d(BD) coupe [AE] en un point qui ne peut être que C et [A,C,E] est exclu.

b) démonstration analogue.

Théorème 1.6

Si A et B sont deux points distincts, il existe F tel que [A,F,B]. (Entre deux points il en existe un troisième).

Démonstration



- $\exists E, E \notin d(AB)$ (O6)
- $\exists C$, [AEC] (O2)
- $d(AC) = d(AE)$ (1.1)
- $B \notin d(AE)$ car $E \notin d(AB)$.

Ainsi $B \notin d(AC)$ donc ABC est un triangle.

Soit D tel que [B,C,D]. Par (1.5) il existe F, $F \in d(D,E)$ et [AFB].

Remarque 6

Il y a un point F_1 entre A et F, un point F_2, entre A et F_1 ... Il y a donc une infinité de points sur un segment. Remarquons que O2 donne une infinité de points sur une demi-droite.

Remarque 7

Si A', B', C' sont trois points non colinéaires du plan p(ABC) on a p(A'B'C') = p(ABC). C'est une conséquence de O8.

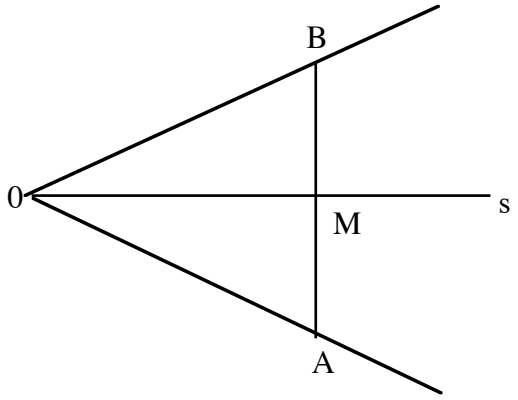
Convexité

Définition

Une partie $\mathcal{A}$ *de* $\mathbb{P}$ *est convexe si* $\forall A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$ *on a :* $[AB] \subset \mathcal{A}$

Par exemple soient deux demi-droites [OA et [OB (non opposées). Leur réunion est un **angle** de sommet O. Soient A'∈ [OA, B'∈ [OB, A', B'≠O. Pour M parcourant [A'B'] , la réunion des demi-droites [OM définit le **secteur angulaire (convexe)** $\widehat{AOB}$ On peut aussi parler du secteur angulaire non convexe, complémentaire du précédent.

Remarque 8



Sur l'ensemble D des demi-droites d'origine O incluses dans le secteur $\widehat{AOB}$ on peut définir une relation ternaire [s,t,r] en associant à une telle demi-droite le point M où elle coupe [AB] et en transportant par la bijection M → [OM l'ordre sur [AB] en un ordre sur D. Cela ne dépend pas de A et B choisis sur les côtés de l'angle (Exercice).

Proposition 1.7 et définition

Si d est une droite du plan, il existe deux sous-ensembles convexes π *et* π' *tels que* $\mathbb{P}$ *- d soit réunion disjointe de* π *et* π' *et tels que si* $M \in \pi$ *et* $M' \in \pi'$ *l'intervalle* $]MM'[$ *coupe d. L'ensemble* $\{\pi,\pi'\}$ *est défini de manière unique.* π *et* π' *sont les deux demi-plans définis par d.*

Démonstration

Sur $\mathbb{P}$ - d on met la relation R : MRN ⇔ M = N ou $]MN[\cap d = \varnothing$. Il est facile de voir que c'est une relation d'équivalence (la transitivité vient de O8). Si $M \notin d$, si π est la classe de M, on voit que π est la réunion de tous les segments [MN] tels que $[MN] \cap d = \varnothing$. Il y a au moins deux classes π et π' (à cause de O2). Si $M \in \pi$, $M' \in \pi'$ et $Q \in \mathbb{P}$ - d , la droite d ne peut couper qu'un seul des intervalles]MQ [et]M'Q[donc il y a deux classes exactement.

Trois modèles :

1) Le modèle d'Euclide : Le plan affine (euclidien) usuel.

2) Le modèle de Poincaré : Comme ensemble on prend le demi-plan formé par les nombres complexes z tels que $\operatorname{Im} z > 0$. Les droites sont les demi-cercles contenus dans ce demi-plan et centrés sur l'axe réel ainsi que les demi-droites ($\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z > 0$). Cet espace est souvent noté $\mathbb{H}$ (comme hyperbolique).

3) Le modèle de Klein : L'ensemble des points est un disque ouvert du plan euclidien. Les droites sont les cordes de ce cercle.

A titre d'exercice (difficile), mentionnons le **problème de Sylvester** :

Soient n points non alignés dans un plan satisfaisant aux axiomes d'ordre. Il existe une droite qui contient exactement deux points.

§ 2 - LES AXIOMES DE CONGRUENCE

Sur l'ensemble des intervalles on suppose vérifiée une relation binaire appelée congruence notée $AB \equiv CD$. Intuitivement, c'est-à-dire dans le modèle d'Euclide, cette relation signifie que les intervalles $]AB[$ et $[CD[$ ont même longueur. On suppose que les axiomes suivants sont vérifiés :

L1 **Si A, B, C sont trois points tels que $A \neq B$, sur toute demi-droite d'origine C, il existe un point D unique tel que $AB \equiv CD$.**

L2 **$AB \equiv CD$ et $CD \equiv EF \Rightarrow AB \equiv EF$.**

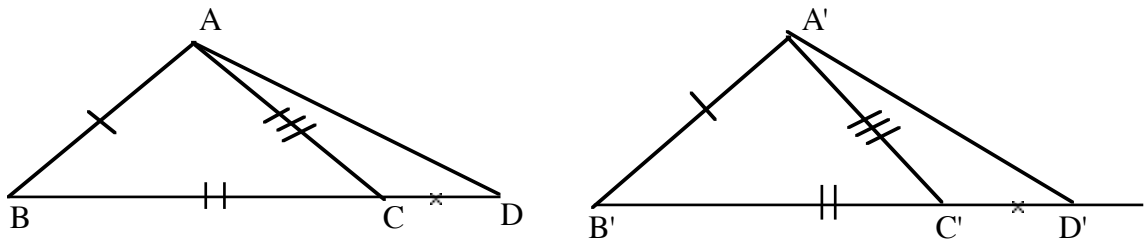
L3 **$AB \equiv BA$.**

L4 **Si $[A,B,C]$ et $[A',B',C']$, si $AB \equiv A'B'$ et $BC \equiv B'C'$ alors $AC \equiv A'C'$.**

Définition

Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont dits congrus ou égaux, et on note $ABC \equiv A'B'C'$, si $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $CA \equiv C'A'$.

L5 **Si ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles égaux, si D et D' sont tels que $[BCD]$ et $[B'C'D']$ (ou $[BDC]$ et $[B'D'C']$) et $BD \equiv B'D'$ alors $AD \equiv A'D'$.**



Remarques

1) La congruence est une relation d'équivalence :

• AB ≡ AB (L3 deux fois plus L2)

• AB ≡ CD ⇒ CD ≡ AB :

Sur la demi-droite [AB, il existe un point B' tel que CD ≡ AB' (L1). Par L2 on a AB ≡ AB' et donc B ≡ B' (L1) donc CD ≡ AB.

2) Dans ce qui suit on dira "AB est congru à CD" pour exprimer AB ≡ CD et, par abus de langage, "AB est égal à CD" ou "[AB] est égal à [CD]".

L6 Soient ABC un triangle, A' et B' deux points tels que AB ≡ A'B'. Dans chacun des deux demi-plans définis par d(A'B'), il existe un point C' unique tel que ABC ≡ A'B'C'.

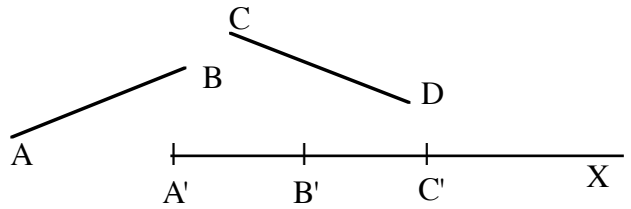
Définition

Une classe d'équivalence pour la relation de congruence est une longueur.

On peut **comparer** les longueurs :

Soient quatre points A, B, C, D. Soit le point D' sur la demi-droite [AB tel que AD' ≡ CD. Si [A,B,D'] on dira que l'intervalle]AB[est plus petit que l'intervalle]CD[et on notera AB < CD. Tout aussi bien on dira que la longueur de]AB[est plus petite que la longueur de]CD[. Le lecteur vérifiera que ce sont bien des définitions intrinsèques, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent que de la longueur (Pour cette vérification utiliser les propositions 2.2 à 2.4).

On peut faire la **somme** de deux longueurs : soient quatre points A, B, C, D. Sur une demi-droite [A'X on prend B' tel que AB' = AB, puis C' sur [B'X tels que B'C' = CD et on définit AB+CD = A'C'.

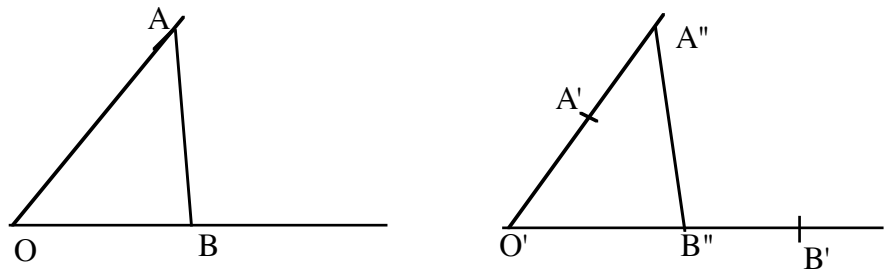


On vérifie facilement que la classe de A'C' ne dépend que de celles de AB et CD.

Il nous est possible de définir une congruence entre les angles. Pour faciliter le langage on confondra la notion d'angle (deux demi-droites de même origine) et de secteur angulaire convexe (ensemble convexe défini par ces demi-droites supposées non opposées). Pour l'une ou l'autre de ces notions on utilisera une notation du type $A\hat{O}B$.

Soient deux angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'O'B'}$. On prend A" sur [O'A' et B" sur [O'B' tels que O'A" ≡ OA et O'B" ≡ OB.

On dit alors que $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$ si et seulement si AB ≡ A" B".

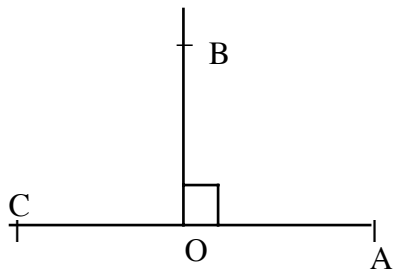


On vérifie facilement (grâce à L5) que cette définition dépend seulement des secteurs angulaires et pas des points A,B,A',B' qui ont été utilisés.

Il est tout aussi aisé de s'assurer que les axiomes L1 à L4 ont leurs équivalents en termes d'angles.

Si [OA, [OB, [OC sont trois demi-droites telles que [[OA,[OB,[OC] on dira que l'angle $\widehat{AOB}$ est plus petit que $\widehat{AOC}$, ce que l'on note $\widehat{AOB} < \widehat{AOC}$.

Soit $\widehat{AOB}$ un angle. Soit C ∈ O/A.



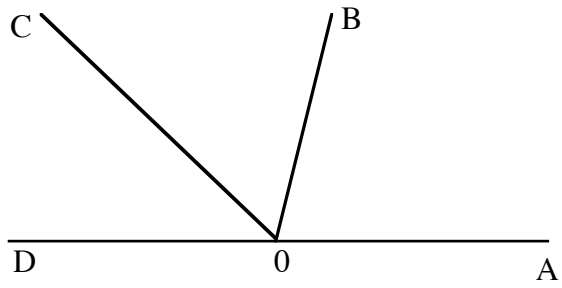
L'angle $\widehat{AOB}$ est appelé **angle droit** si $\widehat{AOB} \equiv \widehat{COB}$

L'angle $\widehat{AOC}$ est un **angle plat.**

On notera que $\widehat{BOC}$ est aussi un angle droit.

L'angle droit sera désigné par $\mathfrak{d}$, l'angle plat par $\mathfrak{p}$.

Un **angle aigu** est un angle plus petit qu'un angle droit, un **angle obtus** est un angle compris entre un angle droit et un angle plat.



On peut définir **la somme de deux angles** : on les transporte pour qu'ils deviennent adjacents et alors : $\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC}$.

(C'est possible si $\widehat{BOC} < \widehat{BOD}$, $\widehat{BOD}$ étant le "supplémentaire" de $\widehat{AOB}$).

Les "cas d'égalité des triangles" sont satisfaits, dans le sens suivant :

1) Soient ABC et A'B'C' deux triangles tels que AB ≡ A'B', \O(BAC;\s\UP12(^)) ≡ $\widehat{B'A'C'}$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$. Alors ABC ≡ A'B'C'.

2) Soient ABC et A'B'C' deux triangles tels que AB ≡ A'B', BC ≡ B'C', $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$. Alors ABC ≡ A'B'C'.

Dans ce qui suit si A, B, C d'une part et A', B', C' d'autre part sont alignés, on écrira encore ABC ≡ A'B'C' si AB ≡ A'B', BC ≡ B'C', AC ≡ A'C'.

Proposition 2.2

Soient A, B, C alignés et A', B', C' alignés.
On suppose que [A,B,C] et ABC ≡ A'B'C'. Alors [A',B',C'].

Proposition 2.3

Soient A, B, C alignés ; A', B' deux points distincts tels que AB ≡ A'B'. Il existe C' unique sur la droite (A',B') tel que ABC ≡ A'B'C'.

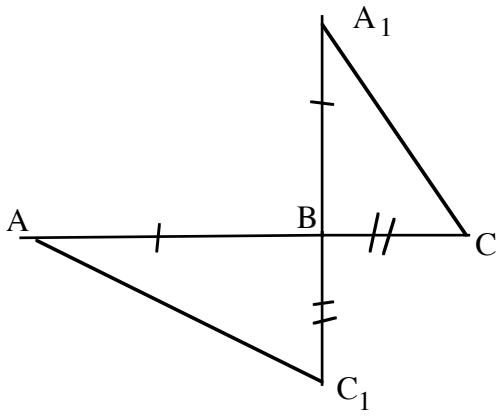
Proposition 2.4

Soient A, B, C alignés et A', B', C' quelconques tels que ABC ≡ A'B'C'. Alors A', B', C' sont alignés.

Nous montrons cette dernière proposition laissant au lecteur le soin de prouver les premières.

Nous raisonnons par l'absurde en supposant A', B', C' non alignés. Par L6, il existe un point C_1 tel que $ABC_1 \equiv A'B'C'$. Soit le point A_1 sur B/C_1 tel que $[C_1BA_1]$ et $A_1B \equiv AB$ (L1). On a donc $AC \equiv A_1C_1$ (L4) et $ABC \equiv A_1BC_1$.

En appliquant L5 aux triangles ABA_1 et A_1BA on a $A_1C \equiv AC_1$.

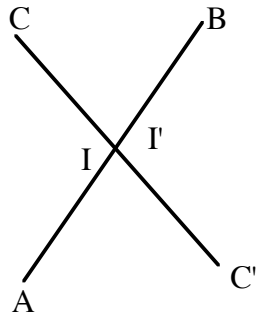


Par ailleurs $A'C' \equiv AC$, $AC \equiv A_1C_1$. Ainsi $ACC_1 \equiv A_1CC_1$. Les deux points A et A_1 sont dans un même demi-plan par rapport à (CC_1). (Car $]AC[$ et $]A_1C_1[$ ont un point en commun). Donc $A = A_1$ (Propriété d'unicité dans L6) ce qui est une contradiction (A_1 ne peut appartenir à la droite (AC)).

Théorème 2.5

Tout intervalle]AB[possède un milieu M c'est-à-dire que [A,M,B] et MA ≡ MB.

Démonstration



On considère un point C n'appartenant pas à la droite (AB). Soit $C' \neq C$ tel que $ABC \equiv BAC'$ (L6), C' et C se trouvant dans deux demi-plans distincts (par rapport à (AB)).

L'intervalle $]CC'[$ coupe (AB) (1.7) en un point I. Soit I' le point de (AB) tel que $AIB \equiv BI'A$ (2.3). On a $CI \equiv C'I'$ et $CI' \equiv C'I$ (L5) Ainsi $CIC' \equiv C'I'C$.

Comme C, I, C' sont alignés, il en est de même pour C', I', C. Donc $I' \in (CC')$ et par suite I' = I.

Finalement si I n'est pas sur l'intervalle]AB[, par exemple si [I,A,B] l'assertion $IA \equiv IB$ contredit L1. Ainsi le point I n'est autre que le point M cherché.

Théorème 2.6

Tout angle admet une bissectrice, c'est-à-dire une demi-droite de même origine qui partage le secteur angulaire en deux secteurs congrus entre eux.

Démonstration

On peut considérer que l'angle est $\widehat{AOB}$ avec $OA \equiv OB$, on prend M milieu de $]AB[$ et la bissectrice est la demi-droite $[OM$.

Définition

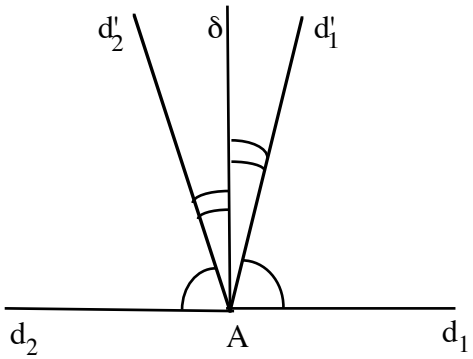
Deux droites sécantes sont dites ***perpendiculaires*** *si l'un des quatre secteurs angulaires qu'elles définissent est un angle droit. On notera* $d_1 \perp d_2$ *cette relation.*

On voit facilement que cette définition ne dépend pas du secteur choisi : si l'un est droit, ils le sont tous. Ainsi la perpendicularité est une relation symétrique.

Théorème 2.7

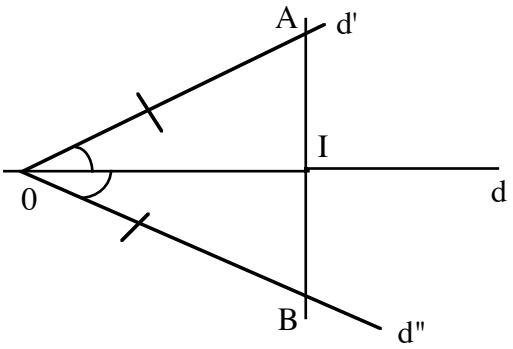
Soient d *une droite,* A *un point. Il existe une droite* d' *et une seule contenant* A *et perpendiculaire à* d.

Montrons ce résultat d'abord si $A \in d$.



Soient d_1 et d_2 les deux demi-droites définies par A sur d. Soient d'_1 et d'_2 deux demi-droites d'origine A dans le même demi-plan par rapport à d et telles que l'angle $(\widehat{d_1,d'_1})$ soit égal à $(\widehat{d_2,d'_2})$ (c'est possible par l'axiome L1 transposé aux angles). Si $d'_1 = d'_2$ on a gagné.

Sinon la bissectrice δ de l'angle $(\widehat{d'_1 d'_2})$ donne la solution (L4 pour les angles).



Si maintenant A n'est pas un point de d, si O est un point de d et $d' = [OA$, soient d'' la demi-droite d'origine 0 et distincte de d' telle que les angles $(\widehat{d,d'})$ et $(\widehat{d,d''})$ sont égaux, B le point de d'' tel que $OA \equiv OB$: la droite (AB) répond à la question (si I est le point de rencontre de (AB) avec d, les triangles OAI et OBI sont égaux donc $\widehat{OIA} \equiv \widehat{OIB}$).

On notera que l'existence et l'unicité de la perpendiculaire à une droite sont des propriétés indépendantes du postulat d'Euclide.

Proposition 2.8

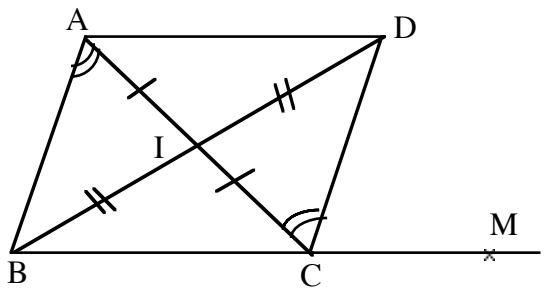
Deux angles opposés par le sommet sont égaux.

Le lecteur fera la démonstration après avoir justifié les termes employés.

Le triangle

Proposition 2.9

Tout angle extérieur d'un triangle est strictement supérieur aux deux autres angles intérieurs.



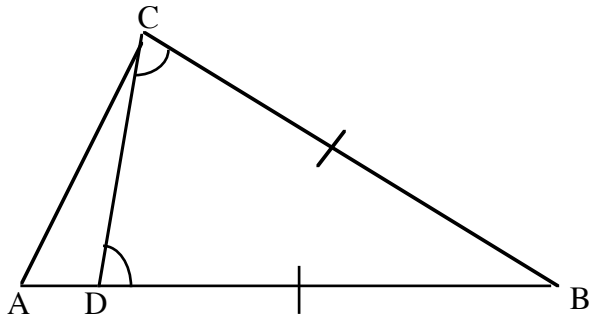
Démonstration :

Soient I le milieu du côté [AC] d'un triangle ABC et D tel que [B,I,D] et BI ≡ ID. On a $\widehat{AIB} \equiv \widehat{CID}$ donc $\widehat{BAC} \equiv \widehat{ACD}$.

D'autre part la demi-droite [CA est entre [CB et [CD donc [CD est entre [CA et [CM. Par suite $\widehat{ACD} < \widehat{ACM}$ et finalement $\widehat{BAC} < \widehat{ACM}$.

Proposition 2.10

Dans un triangle ABC, les relations AB > BC et $\hat{C} > \hat{A}$ sont équivalentes.



• Supposons AB > BC

Soit D ∈ [AB] tel que BD ≡ BC.

On a : \O(ACB;\s\UP12(^))

$\widehat{DCB}$ et $\widehat{DCB} \equiv \widehat{CDB}$ (car les triangles DCB et CDB sont égaux) .

Par ailleurs $\widehat{CDB} > \widehat{CAB}$ par 2.9.

Ainsi $\hat{C} = \widehat{ACB} > \widehat{CAB} = \hat{A}$.

• **Supposons $\hat{C} > \hat{A}$** . A cause de ce qu'on vient de montrer, si $AB < BC$ on a $\hat{C} < \hat{A}$. Si $AB \equiv BC$ on a $\hat{C} = \hat{A}$. C'est impossible donc $AB > BC$.

Proposition 2.11

Un triangle a au moins deux angles aigus.

Démonstration :

Si ABC a au moins un angle $\hat{A}$ qui est soit droit, soit obtus, l'angle extérieur à $\hat{A}$ est aigu ou droit et il majore chacun des deux autres angles intérieurs du triangle.

Théorème 2.12 *(Inégalité triangulaire)*

Soient A, B, C trois points. On a $AB+BC \geq AC$, l'inégalité étant stricte si ABC est un triangle.

Démonstration

Le résultat est évident si A,B,C sont alignés.

Si les trois points forment un triangle, soit D tel que $BC \equiv BD$ et [ABD].

On a $B \in]AD[$ donc $\widehat{ACD} > \widehat{BCD} \equiv \widehat{BDC}$.

Ainsi, par 2.10, $AC < AD = AB+BD$.

Corollaire 2.13

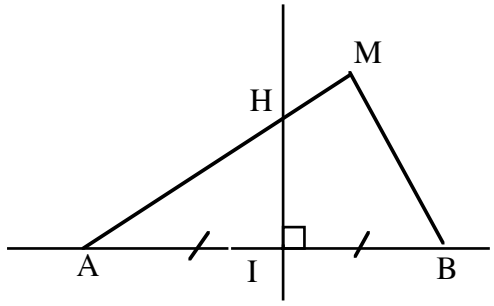
Si $A_1, A_2, ..., A_n$ sont des points on a :

$$A_1A_2+A_2A_3+...+A_{n-1}A_n \geq A_1A_n.$$

Théorème 2.14 *(la médiatrice)*

Soient A et B deux points distincts, I le milieu de [AB], δ la perpendiculaire à (AB) passant par I. On a : $\delta = \{M ; MA = MB\}$. On dit que δ est la médiatrice du segment [AB] (ou de l'intervalle]AB[).

Démonstration : L'existence de δ provient des théorèmes 2.5 et 2.7. Si $M \in \delta$; les



triangles MAI et MBI sont égaux donc MA ≡ MB. Si M ∉ δ supposons par exemple que M et B sont dans un même demi-plan par rapport à δ, alors [MA] coupe δ en H et :

MA ≡ AH + HM

≡ BH + HM

> BM par 2.10.

Proposition 2.15

Soient ABC et A'B'C' deux triangles tels que AB ≡ A'B' et BC ≡ B'C'. Alors $\hat{B} < \hat{B}'$ *⇔ AC < A'C'.*

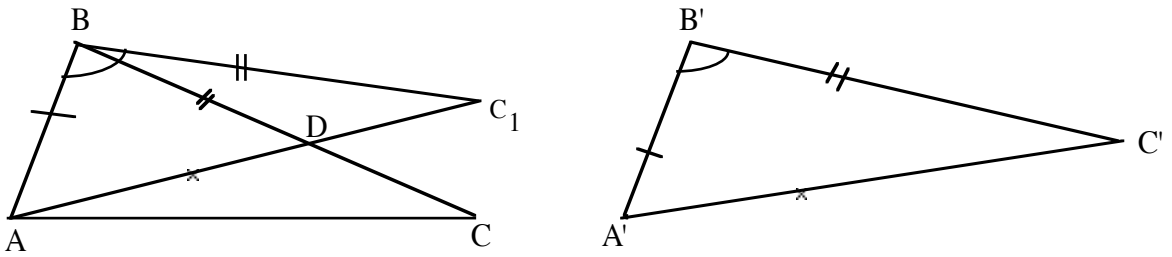
Démonstration

a) Supposons $\hat{B}' > \hat{B}$.

Soit C_1 tel que $AC_1 \equiv A'C'$ et $BC_1 \equiv BC \equiv B'C'$, C_1 et C étant dans le même demi-plan par rapport à (AB). Comme $\hat{B}' > \hat{B}$ la demi-droite [BC est entre [BA et [BC_1. Ainsi (C_1A) et (BC) se coupent en un point, disons D.

• Si D = C on a $AC \equiv AD < AC_1 = A'C'$.

• Sinon ACC_1 est un triangle. On va montrer que dans ce triangle $\hat{C}_1 < \hat{C}$ ce qui donnera le résultat.

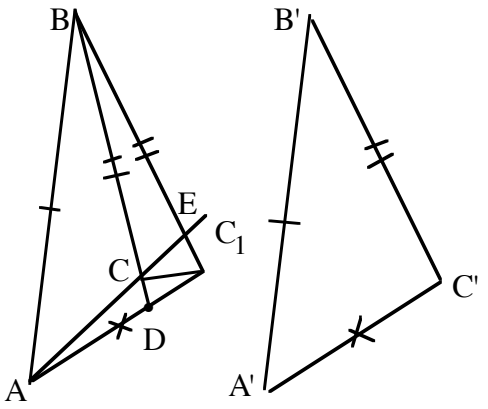


La demi-droite [CD est entre [CA et [CC_1.

• Supposons [BDC]

$$\widehat{AC_1C} \equiv \widehat{DC_1C} < \widehat{BC_1C} \equiv \widehat{BCC_1} < \widehat{ACC_1} \Rightarrow AC < AC_1.$$

• Supposons [BCD]



Dans ce cas [AC coupe $[BC_1]$ en un point E

$\widehat{AC_1C} < \widehat{C_1CE}$ (2.9),

$\widehat{C_1CE} < \widehat{C_1CB} \equiv \widehat{BC_1C} < \widehat{ACC_1}$

et on a $A'C' \equiv AC_1 > AC$.

b) Supposons $AC < A'C'$:
on a $\hat{B} < \hat{B}'$ ou $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ ou $\hat{B} > \hat{B}'$, ces trois cas s'excluant mutuellement. En appliquant la première partie de la démonstration on a le résultat : $\hat{B} < \hat{B}'$.

Exemple : Le modèle de Poincaré

Si A et B sont deux points de $\mathbb{H}$, on pose

$$\ell(AB) = \left| \int_{AB} \frac{ds}{y} \right| .$$

L'intégrale étant prise sur l'arc AB (c'est-à-dire sur un arc de cercle ou un segment selon les cas).

Théorème 2.16

Pour $A \in \mathbb{H}$, appelons a l'affixe de A et x_A et y_A les parties réelles et imaginaires de a.

1) *Si $x_B = x_A$:*

$$\ell(AB) = \left| \log \frac{y_B}{y_A} \right|$$

2) *Si A et B sont sur une droite de Poincaré (un arc de cercle) rencontrant l'axe réel en P et Q*

$$\ell(AB) = \left| \log \left| \frac{b-p}{b-q} : \frac{a-p}{a-q} \right| \right|$$

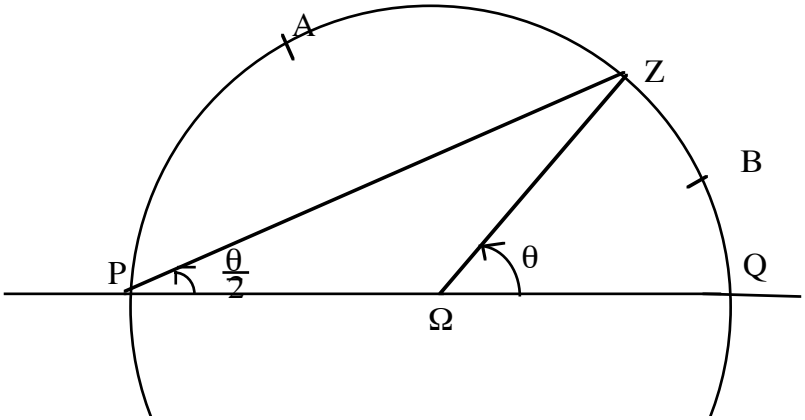
$$= 2 \operatorname{Arg th} \left| \frac{b-a}{b-\bar{a}} \right| .$$

N.B. Cette dernière formule est valable même dans le cas 1).

Démonstration :

1) Si $x_B = x_A$, ds = dy sur AB d'où le résultat.

2)



• On paramètre le cercle par : $z = \omega + re^{i\theta}$ (r étant le rayon)

On trouve :

$$\ell(AB) = \left| \int_{\arg(a-\omega)}^{\arg(b-\omega)} \frac{d\theta}{\sin\theta} \right|$$

$$= \left| \log \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \right|_{\arg(a-\omega)}^{\arg(b+\omega)} \qquad \text{et on utilise } \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{ZQ}{ZP} = \left|\frac{z-q}{z-p}\right| .$$

• La seconde formule provient de :

$$\operatorname{Arg th} t = \frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t} \text{ , de } \left|\frac{b-a}{b-\bar{a}}\right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \right|$$

et de $$\left|\left(\frac{b-p}{b-q} : \frac{a-p}{a-q}\right)\right| = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} \quad \text{où } \alpha = \operatorname{Arg}(a-\omega),\ \beta = \operatorname{Arg}(b-\omega).$$

On peut alors définir une congruence dans $\mathbb{H}$:

$$AB \equiv CD \Leftrightarrow \ell(AB) = \ell(CD) \Leftrightarrow \left|\frac{b-a}{b-\bar{a}}\right| = \left|\frac{c-d}{c-\bar{d}}\right| .$$

Les axiomes L1 à L4 sont faciles à vérifier. On admettra L5 et L6.

On remarquera que si y_B tend vers 0 c'est-à-dire si B se rapproche de l'axe réel, $\ell(AB) \to +\infty$.

Les points de l'axe réel (qui ne sont pas dans $\mathbb{H}$) sont des "points à l'infini" sur les droites.

Les congruences concernant les angles sont faciles à traiter si l'on admet :

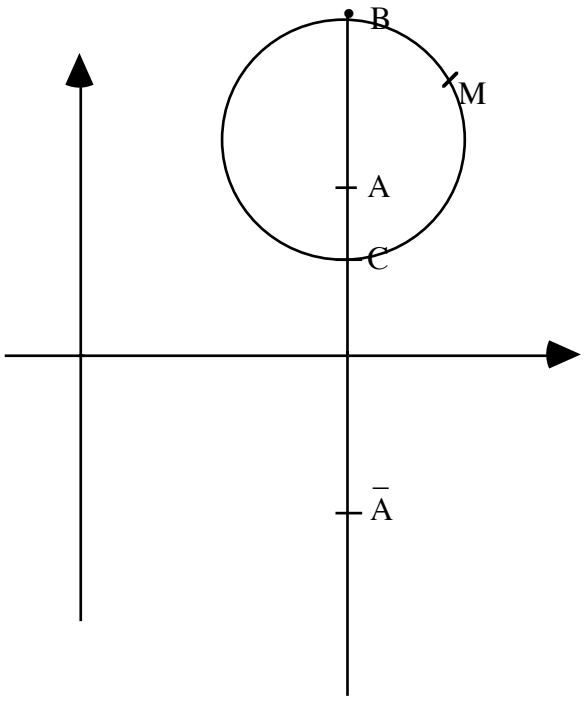
Théorème 2.17

Deux angles sont congrus entre eux au sens de $\mathbb{H}$ si les angles des tangentes aux sommets sont congrus entre eux (au sens euclidien). En particulier $(\widehat{d_1,d_2}) = \vartheta$ si les tangentes au sommet sont orthogonales.

Un processus de même nature peut être décrit pour le modèle de Klein (mais 2.17 est faux).

Et bien entendu pour le modèle d'Euclide il n'y a pas de secrets !

Pour conclure, décrivons les cercles pour la géométrie de $\mathbb{H}$.



Un cercle de centre A de rayon r est l'ensemble des points M tels que :

$$2 \text{ Arg th} \left| \frac{m-a}{m-\bar{a}} \right| = r,$$

c'est-à-dire tels que $\frac{\|AM\|}{\|\bar{A}M\|}$ est constant ($\|.\|$ désigne la norme euclidienne). C'est donc un cercle au sens euclidien (ensemble des points du plan euclidien dont le rapport des distances à deux points fixes est constant). Mais le centre de ce cercle au sens de $\mathbb{H}$ n'est pas le même qu'au sens de la géométrie euclidienne : le point A n'est pas le milieu de BC au sens euclidien.

Exercice : Etant donné un cercle contenu dans $\mathbb{H}$, trouver son $\mathbb{H}$-centre.

II - PARALLÉLISME

§ 3 - L'AXIOME DE CONTINUITE

C'est un axiome inspiré par la construction de $\mathbb{R}$ par la méthode des coupures.

C1 **Pour toute partition d'une droite d en deux sous-ensembles $d_1 \neq \emptyset$ et $d_2 \neq \emptyset$ tels qu'aucun point de d_i ne se trouve entre deux points de d_j, il existe un point A de d qui se trouve entre tout point de d_1 (autre que A) et tout point de d_2 (autre que A).**

Comme conséquences immédiates de cet axiome on a des énoncés analogues en remplaçant "droite" par "segment", "intervalle", "demi-droite". De même, en utilisant la remarque 8 du § 1, on a :

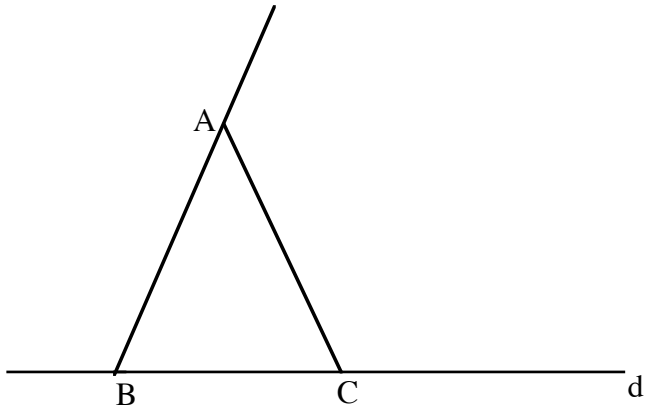
C1' **Pour toute partition d'un secteur angulaire d'origine O en deux sous-ensembles $S_1 \neq \emptyset$, $S_2 \neq \emptyset$ de demi-droites d'origine O tels qu'aucune demi-droite de S_i ne se trouve entre deux demi-droites de S_j, il existe une demi-droite r d'origine O qui se trouve entre toute demi-droite de S_1 autre que r et toute demi-droite de S_2 autre que r.**

On remarquera que cet axiome n'est pas vérifié dans le plan $\mathbb{Q}^2$: si d est une droite de ce plan identifiée à $\mathbb{Q}$, si $d_1 = \{x \in \mathbb{Q}, x > 0, x^2 > 2\}$ et $d_2 = d \backslash d_1$, le point A n'existe pas.

Premier résultat sur le parallélisme

Théorème 3.1

Soient d une droite et $A \notin d$. Il existe deux demi-droites r_1 et r_2 d'origine A définissant deux secteurs angulaires S_1 et S_2 tels que S_1 est l'ensemble des demi-droites d'origine A rencontrant d et S_2 est l'ensemble des demi-droites d'origine A ne rencontrant pas d. De plus S_1 est convexe ; r_1 et r_2 sont dans S_2.



Démonstration

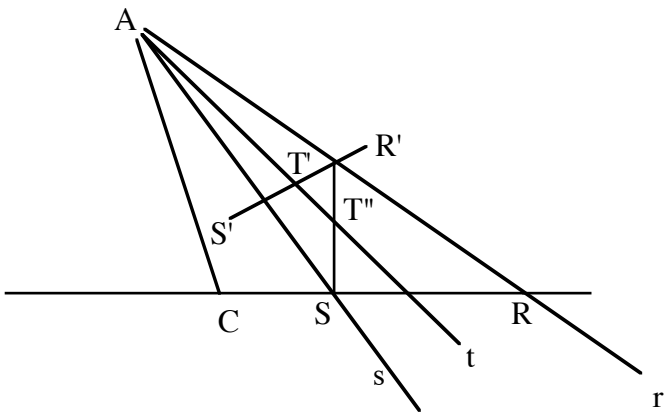
Soient $B,C \in d$. On considère une partition (T_1, T_2) du secteur angulaire convexe T défini par $[AC$ et A/B. T_1 est l'ensemble des demi-droites contenues dans ce secteur et qui coupent d, T_2 l'ensemble des demi-droites qui ne coupent pas d.

Si X est un point de d, nous appellerons x la demi-droite $[AX$ et x' le rayon A/X.

Si E est tel que $[B,C,E]$, $e \in T_1$ donc $T_1 \neq \emptyset$;

Si F est tel que $[F,B,C]$, $f' \in T_2$ donc $T_2 \neq \emptyset$.

a) Soient s et $r \in T_1$ et t tel que $[s,t,r]$. Comme t est dans le secteur angulaire convexe $S\hat{A}R$, on peut trouver $S' \in]AS[$, $T' \in]AT[$, $R' \in]AR[$ tels que $[S',T',R']$.

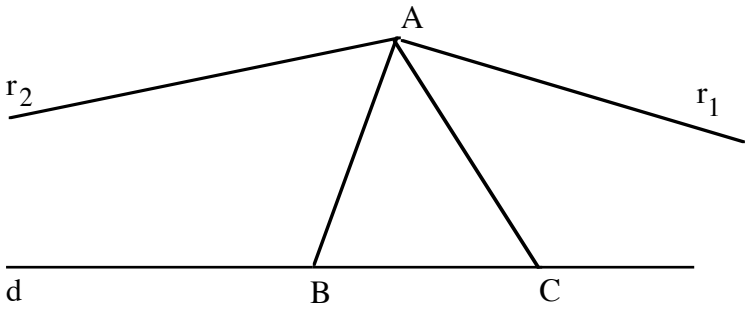


Le théorème 1.5 appliqué au triangle $S'R'S$ nous montre que $[AT'$ coupe $]R'S[$ en un point T''.

Puis ce même théorème appliqué au triangle $SR'R$ montre que $[AT''$ coupe $]SR[$ en un point T. Donc t coupe la droite d ie $t \in T_1$: entre deux demi-droites de T_1 ne peuvent se trouver des demi-droites de T_2.

b) Soient maintenant deux demi-droites s et r de T_2 et soit t telle que $[s,t,r]$. Si t coupe d ie si $t \in T_1$, on a soit $[[AC,s,t]$ soit $[[AC,r,t]$ et donc, en appliquant a, comme $[AC \in T_1$, on a $s \in T_1$, ou $r \in T_1$ ce qui est absurde.

Ainsi T_1 et T_2 vérifient les conditions de C1'. Dans le secteur angulaire T on a donc une demi-droite r_1 qui sépare T_1 et T_2. De même dans le secteur angulaire défini par [AB et A/C on a une demi-droite r_2 qui sépare les demi-droites rencontrant d de celles qui ne rencontrent pas d. Ainsi le couple (r_1,r_2) satisfait la première condition du théorème.



De plus :

1) Le secteur angulaire S_1 est convexe. En effet si M',N' sont deux points de S_1, les demi-droites [AM' et [AN' coupent d en M et N et on conclut comme dans le a) ci-dessus.

2) Les demi-droites r_1 et r_2 sont dans S_2.

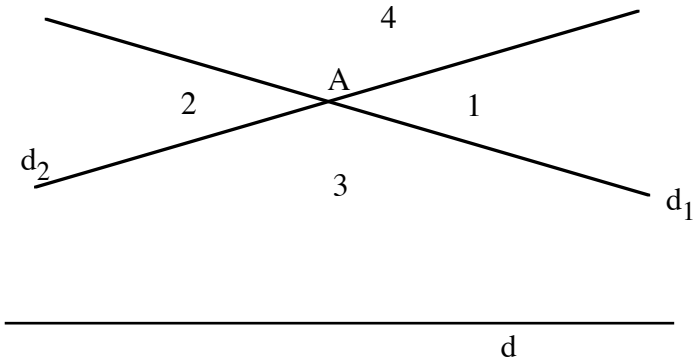
Supposons que r_1 coupe d en un point M : on a alors [BCM]. Soit N un point de d tel que [CMN]. La demi-droite [AN est dans S_2 (puisqu'elle n'est pas dans le secteur $\widehat{CAM}$) et elle est dans S_1 (puisqu'elle coupe d) ce qui est impossible.

Définition

*On dit que r_1 (ou r_2) est **parallèle** à d.*

*La droite d_1 (resp. la droite d_2) engendrée par la demi-droite r_1 (resp. r_2) (c'est-à-dire la réunion de r_1 et de la demi-droite opposée r_1') est une **parallèle** à d menée par A.*

Il peut arriver que $d_1 = d_2$. Ainsi par le point $A \notin d$ on peut mener une ou deux parallèles à d.



Les droites d_1 et d_2 définissent quatre secteurs angulaires. Toute droite incluse dans les secteurs 3 et 4 (cf figure) coupe la droite d (le secteur 3 est le secteur S_1 du théorème).

Toute droite incluse dans les secteurs 1 et 2 n'a aucun point commun avec d. On prendra garde que "d_1 parallèle à d" n'est pas une phrase équivalente à "d_1 ne coupe pas d".

On a :

Théorème 3.2

Par un point A n'appartenant pas à une droite d on peut mener une ou deux parallèles à d. Dans le cas où il y a deux parallèles on peut mener par A une infinité de droites ne coupant pas d.

Exercice : Pourquoi une infinité ? cf (§ 1, remarque 6).

A priori on peut penser que pour certain couple (A,d) il y a une parallèle et deux pour d'autres couples. On verra plus loin que cela ne peut se produire.

Remarquons en outre qu'ainsi définie, la relation "d_1 est parallèle à d" n'est pas nécessairement symétrique. Il est encore moins évident qu'elle est transitive.

Théorème 3.3 *(à titre d'exercice)*

Soient d une droite, A un point n'appartenant pas à d, d_1 et d_2 deux droites passant par A et ne coupant pas d. Il existe une droite d' qui coupe d, d_1 et d_2;

On remarquera que dans notre géométrie, deux droites peuvent être :

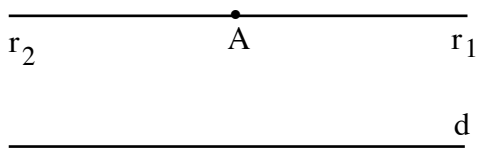
1) **sécantes**

2) **parallèles**

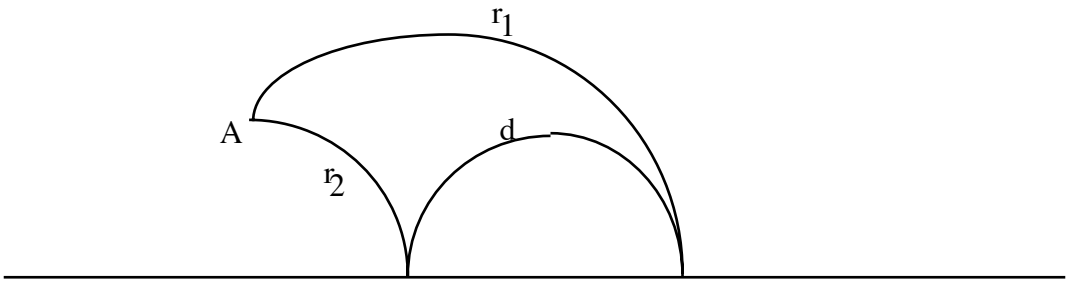
3) ni sécantes, ni parallèles : on dit alors que ce sont des **hyperparallèles**.

Pour conclure nous illustrons le théorème 3.1 dans chacun des trois modèles introduits plus haut.

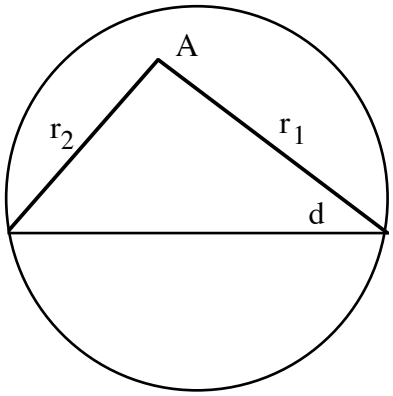
Euclide : Il s'agit d'une géométrie euclidienne ! C'est-à-dire qu'il existe une seule parallèle à d menée par un point A.



Poincaré



Klein



Le "Postulat" d'Archimède

Théorème 3.4 *("Postulat" d'Archimède)*

Soient d une demi-droite d'origine A_0, un intervalle $]CD[$, un point B de d tel que $A_0B > CD$. Il existe un entier n tel que si $A_1, A_2, A_3,\ldots A_{n+1}$ sont des points de d successifs et tels que $A_{i-1}A_i \equiv CD$, on a $A_i \in [A_0B]$ pour $i \leq n$ et A_{n+1} au delà de B (ie $[A_0,B,A_{n+1}]$).

Démonstration

Si X et Y sont deux points de la demi-droite on écrira : $X < Y$ pour $[A_0,X,Y]$. Nous montrons ce théorème par l'absurde. Si le résultat est faux, pour tout i on a $A_i < B$.

Posons : $D_1 = \{X \in [A_0B] \; ; \exists k, X < A_k\}$

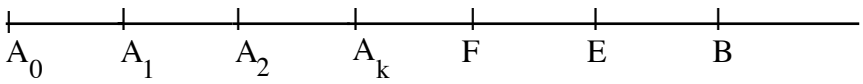
$D_2 = [A_0B] \setminus D_1$.

On a :

i) $D_1 \neq \emptyset$, par exemple $A_1 \in D_1$ et même $A_k \in D_1$ pour tout k.

ii) Soit $B_1 \in [A_0B]$ tel que $B_1B \equiv CD$ (c'est possible puisque $A_0B > CD$. Si $B_1 \in D_1$, il existe k tel que $B_1 < A_k$. Par ailleurs $A_k < A_{k+1} < B$ donc $B_1 < A_k < A_{k+1} < B$ et $A_kA_{k+1} \equiv CD \equiv B_1B$ c'est impossible.
Ainsi $B_1 \in D_2$ donc $D_2 \neq \emptyset$.

iii) Si $X \in D_1$, $Y \in D_2$ on a $X < Y$: sinon, il existe k tel que $Y < X < A_k$ et $Y \in D_1$. Cela montre que les hypothèses de C1 (appliqué à un segment) sont vérifiées. Ainsi il existe un point E du segment $[A_0B]$ tel que $D_1 = \{X \; ; X < E\}$ et $D_2 = \{Y \; ; E < Y$ ou $E = Y\}$ ($E \in D_2$, sinon $E \in D_1$ donc pour un k : $E < A_k$, c'est impossible puisque $A_k \in D_1\}$.
Comme les A_k sont tous dans D_1, ils sont tous dans $[A_0E]$. On peut donc recommencer ce raisonnement en remplaçant $[A_0B]$ par $[A_0E]$. On trouve alors un point F du segment $[A_0E]$ tel que tous les A_k sont dans $[A_0F]$.



Or cela est impossible : puisque $F < E$, $F \in D_1$. Donc il existe un indice ℓ tel que $F < A_\ell$ ce qui est absurde.

Corollaire 3.5

Si $[AB]$ et $[CD]$ sont deux segments tels que $AB < CD$, il existe un entier naturel n tel que $nAB \geq CD$, nAB désignant la longueur d'un segment obtenu en juxtaposant n fois le segment $[AB]$ à lui-même.

§ 4 - LE THEOREME DE SACCHIERI-LEGENDRE

Le trapèze de Sacchieri

L'importance de cet objet apparaît dans les géométries non euclidiennes.

Définition

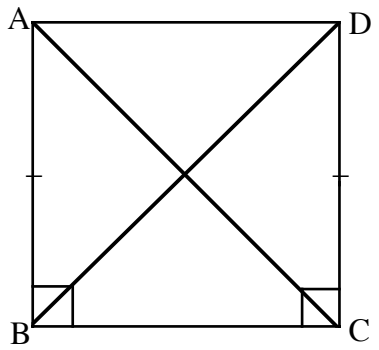
*Un **trapèze de Sacchieri** est un quadrilatère ABCD dans lequel les angles en $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont droits et tel que $AB \equiv CD$. Le segment [BC] est la base inférieure, [AD] est la base supérieure, [AB] et [CD] sont les côtés.*

On remarquera que ce quadrilatère est un rectangle dans le cas de la géométrie euclidienne.

Les dessins qui accompagnent la démonstration, comme ceux qui précèdent, sont réalisés dans le plan euclidien. Ils sont donc essentiellement faux dans une géométrie non euclidienne. A titre d'exercice le lecteur pourra dessiner un trapèze de Saccchieri dans $\mathbb{H}$: c'est facile si on suppose que B et C ont même partie imaginaire.

Proposition 4.1

Dans un trapèze de Sacchieri, $\hat{A} \equiv \hat{D}$.



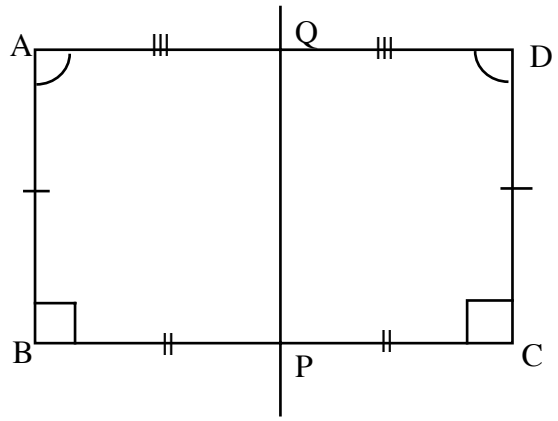
Démonstration

Les triangles ABC et BDC sont égaux donc $AC \equiv BD$.

Par suite les triangles ABD et ACD sont égaux et on a le résultat.

Proposition 4.2

Si P est le milieu de BC et Q le milieu de AD, (PQ) est médiatrice de [BC] et [AD].



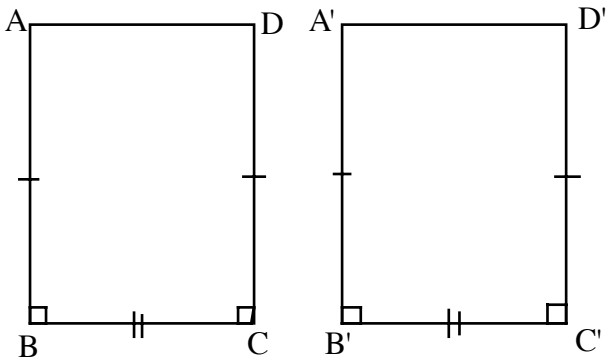
Démonstration

- AQB ≡ QDC,
- QB ≡ QC,

donc (PQ) est la médiatrice de [BC].
De même on voit que PA ≡ PD.

Proposition 4.3

Si ABCD et A'B'C'D' sont deux trapèzes de Sacchieri où BC ≡ B'C', AB ≡ A'B' alors AD ≡ A'D', $\hat{A} \equiv \hat{D} \equiv \hat{A}' \equiv \hat{D}'$



Démonstration

On voit successivement que :

- ABC ≡ A'B'C'
- AC ≡ A'C'
- $\widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'A'}$
- $\widehat{ACD} \equiv \widehat{A'C'D'}$
- ACD ≡ A'C'D'
- AD ≡ A'D'
- $\hat{D} \equiv \hat{D}'$.

Proposition 4.4

Dans un trapèze de Sacchieri, la longueur de la base supérieure est supérieure ou égale à la longueur de la base inférieure.

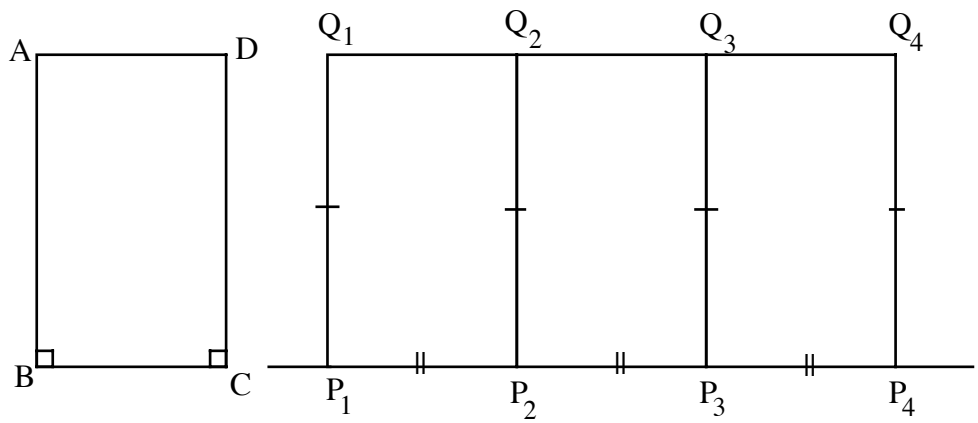
Démonstration

On considère un trapèze de Sacchieri dans lequel BC > AD.

Soient $P_1, P_2, P_3, \ldots P_{n+1}$ des points écrits dans cet ordre sur une droite d, tels que $P_iP_{i+1} \equiv BC$ pour tout i et une suite de trapèze de Sacchieri $Q_iP_iP_{i+1}Q_{i+1}$, tous dans le même demi-plan, tels que $Q_iP_i \equiv AB$.

Soit ℓ la longueur telle que $BC = AD+\ell$.

On a : $nBC = nAD+n\ell$.



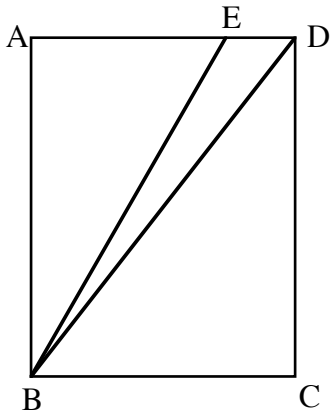
$$nBC = P_1P_{n+1} \leq P_1Q_1+Q_1Q_2+...+Q_nQ_{n+1}+Q_{n+1}P_{n+1}$$

Donc : $nAD+n\ell \leq 2AB+nAD$ ainsi $n\ell \leq 2AB$.

Comme on peut choisir n on arrive à une contradiction avec le postulat d'Archimède.

Proposition 4.5

Dans un trapèze de Sacchieri les deux angles de la base supérieure sont tous deux droits ou tous deux aigus.



Démonstration

Soit E le point de $[AD]$ tel que $BC \equiv AE$. Si $E = D$, les triangles AED et CBD sont égaux donc $\hat{A}$ est droit. Sinon $E \in]AD[$.

Montrons que $\hat{A}$ ne peut être obtus.

Si $\hat{A}$ obtus, $\widehat{AEB}$ est aigu (2.11) donc $\widehat{BED}$ est obtus, donc $\widehat{EDB}$ est aigu (2.11).

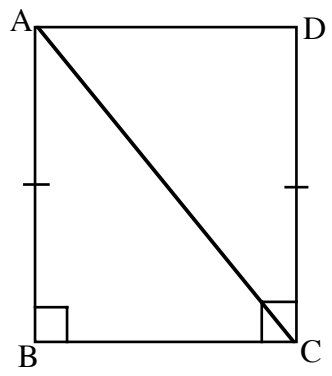
Ainsi $\widehat{EDB} < \widehat{BED}$ donc $BE < DB$ (2.10).

Si on compare alors les triangles AEB et BCD en leur appliquant 2.15, on voit que $\hat{A} < \hat{C}$ donc que $\hat{A}$ est aigu ce qui contredit l'hypothèse.

Le théorème de Sacchieri-Legendre

Théorème 4.6

La somme des deux angles aigus d'un triangle-rectangle est inférieure ou égale à un angle droit.



Démonstration

Soit ABC un triangle rectangle en B complèté en un trapèze de Sacchieri ABCD.

Si BC ≡ AD, \O(BAC;\s\UP12(^)) ≡ $\widehat{ACD}$ et $\widehat{ACD}+\widehat{ACB} \equiv \widehat{BAC}+\widehat{ACB}$ est un angle droit.

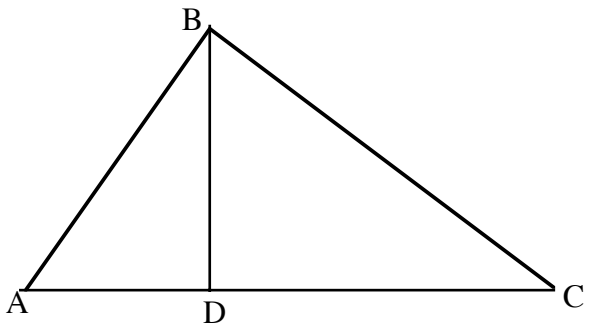
Si BC < AD : $\widehat{BAC} < \widehat{ACD}$ ainsi $\widehat{BAC}+\widehat{BCA} < \widehat{ACD}+\widehat{BCA} = 1$ droit.

Théorème 4.7 (Sacchieri-Legendre)

La somme des angles d'un triangle est inférieure ou égale à un angle plat .

Démonstration

On considère un triangle ABC. Deux de ses angles au moins sont aigus. On suppose ici que $\hat{A}$ et $\hat{C}$ sont aigus.



La perpendiculaire à (AC) menée par B coupe (AC) en un point D du segment [AC] car $\hat{A}$ et $\hat{C}$ sont aigus.

Ainsi $\widehat{ABD}+\widehat{DBC} = \widehat{ABC}$. La somme des angles du triangle ABC est $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} \equiv \hat{A}+\widehat{ABD}+\widehat{DBC}+\hat{C} \leq \mathfrak{d}+\mathfrak{d} = \mathfrak{p}$ à cause du théorème 4.6 appliqué aux deux triangles rectangles ABD et CBD.

§ 5 - LE POSTULAT D'EUCLIDE

Le "cinquième postulat d'Euclide" s'énonce ainsi :

E **Pour toute droite d, pour tout point A n'appartenant pas à d, il existe une droite et une seule passant par A et parallèle à d.**

On remarquera que dans notre géométrie l'existence des parallèles est assurée (3.2).

Si **E** est vérifié il y a donc une seule parallèle à d menée par A et une seule droite passant par A et ne coupant pas d (dans ce cas "parallèle à d" et "sans point commun avec d" sont des expressions synonymes). La géométrie est dite **euclidienne**.

Si **E** n'est pas vérifié il existe deux droites distinctes passant par A et parallèles à d. Elles définissent deux secteurs angulaires aigus opposés par le sommet qui contiennent toutes les droites (il y en a une infinité) passant par A et ne rencontrant pas d. On dira que la géométrie est **hyperbolique**.

Dans ce paragraphe nous montrerons que les assertions suivantes sont équivalentes :

1) **E**

2) La somme des angles d'un triangle quelconque est égale à $\mathfrak{p}$.

3) Il existe un triangle dont la somme des angles est égale à $\mathfrak{p}$.

4) Il existe un rectangle (un rectangle est un quadrilatère convexe dont les quatre angles sont droits).

5) Il existe une droite d et un point A n'appartenant pas à d tels que par A on puisse mener une seule parallèle à d.

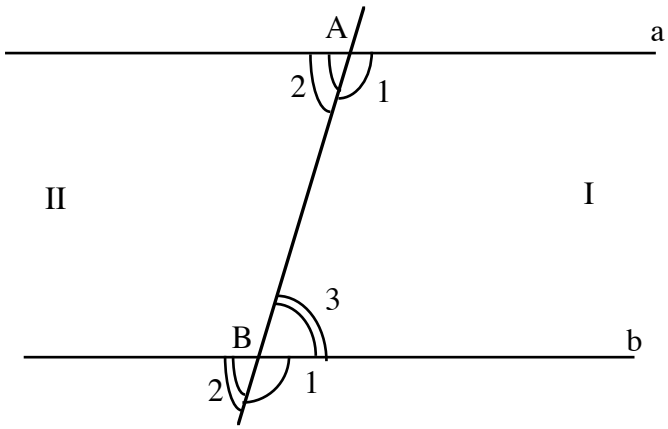
Nous montrons ces équivalences selon l'ordre suivant : $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$.

Théorème 5.1

$1 \Rightarrow 2$.

Lemme 5.2

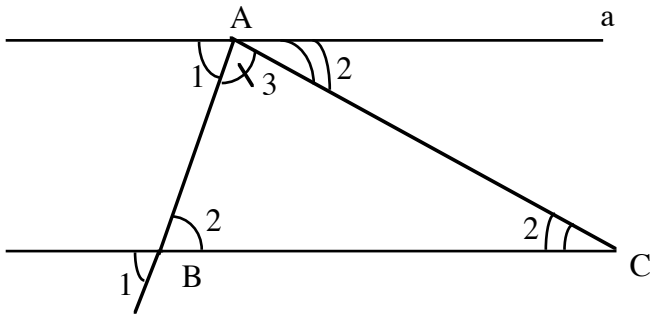
*Soient A et B deux points distincts du plan, a et b deux droites passant par A et B respectivement et faisant avec la droite (AB) des angles "correspondants" égaux (c'est-à-dire $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ - cf figure). Alors a et b n'ont pas de point commun. En particulier si **E** est vérifié, b est la parallèle à a menée par B.*



Démonstration du lemme : On remarquera que $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ est équivalent à $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ c'est-à-dire que les deux demi-plans définis par (AB) jouent le même rôle. Supposons que a et b se coupent dans le demi-plan I en un point C. La somme des angles du triangle ABC est $\hat{A}_1 + \hat{B}_3 + \widehat{ACB}$. Comme $\hat{B}_3 + \hat{B}_1 \equiv \mathfrak{p}$ et $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$ on a une contradiction avec le théorème de Sacchieri-Legendre.

On remarquera que si E est vérifié, le lemme donne une caractérisation de la parallèle à b menée par A : la droite a est la parallèle à b si et seulement si les angles $\hat{A}_1$ et $\hat{B}_1$ sont égaux.

Démonstration du théorème : Soient un triangle ABC et a la parallèle à (BC) menée par A. A cause du lemme,



$\hat{A}_1 \equiv \hat{B}_1$.
D'autre part $\hat{B}_1 \equiv \hat{B}_2$ donc $\hat{A}_1 = \hat{B}_2$ et de même $\hat{A}_2 \equiv \hat{C}_2$.
Ainsi $\hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}_3 \equiv \mathfrak{p}$
$\equiv \widehat{ABC}+\widehat{ACD}+\widehat{CAB}$

Théorème 5.3

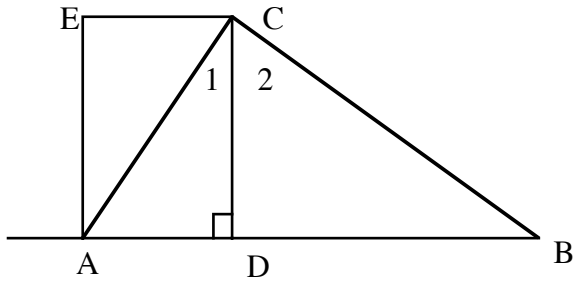
2 ⇒ 3.

Démonstration :

C'est évident puisqu'il existe un triangle.

Théorème 5.4

3 ⇒ 4.



Démonstration :
Soit ABC un triangle dont la somme des angles est égale à $\mathfrak{p}$. On peut supposer que $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont aigus. Soit D le pied de la perpendiculaire à (AB) passant par C et soit E tel que ACE ≡ CAD, E et D se trouvant dans deux demi-plans distincts par rapport à (CA).

$$\widehat{CAD}+\widehat{ADC}+\hat{C}_1+\hat{C}_2+\widehat{CDB}+\widehat{CBD}$$

$$\equiv \widehat{CAB}+\widehat{ABC}+\widehat{BCA}+\widehat{ADC}+\widehat{CDB} \equiv 2\mathfrak{p}.$$

Comme $\widehat{CAB}+\widehat{ADC}+\hat{C}_1 \leq \mathfrak{p}$ et $\hat{C}_2+\widehat{CDB}+\widehat{CBD} \leq \mathfrak{p}$, chacune de ces deux sommes est égale à $\mathfrak{p}$.

Par ailleurs $\widehat{CAE} = \hat{C}_1$.

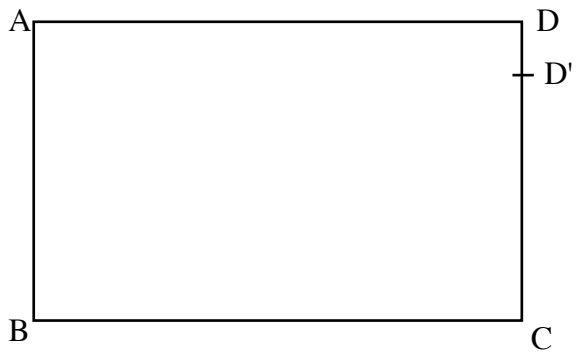
Finalement : $\widehat{CAD}+\hat{C}_1 = \mathfrak{d}$ donc $\widehat{DAE} = \widehat{CAD}+\widehat{CAE} = \mathfrak{d}$

De manière analogue $\widehat{DCE} = \mathfrak{d}$ et $\widehat{CEA} = \widehat{ADC} = \mathfrak{d}$.

Le quadrilatère ECDA est donc un rectangle.

Proposition 5.5

Dans un rectangle, les côtés opposés sont égaux. Les angles formés par une diagonale et deux côtés opposés sont égaux. Les angles formés par une diagonale et deux côtés consécutifs sont complémentaires.



Démonstration :
Soit un rectangle ABCD. Supposons par exemple AB < CD et soit D' ∈ [CD] tel que CD' ≡ AB. Comme $\hat{B} = \hat{C} = \mathfrak{d}$, ABCD' est un trapèze de Sacchieri.

Par ailleurs $\widehat{AD'C} > \widehat{ADC}$ (2.9).

Comme $\widehat{ADC} = \mathfrak{d}$ on en tire que $\widehat{AD'C}$ est obtus ce qui contredit 4.5. Le reste de la proposition s'en déduit aisément car, par exemple, $ABC \equiv BCD$.

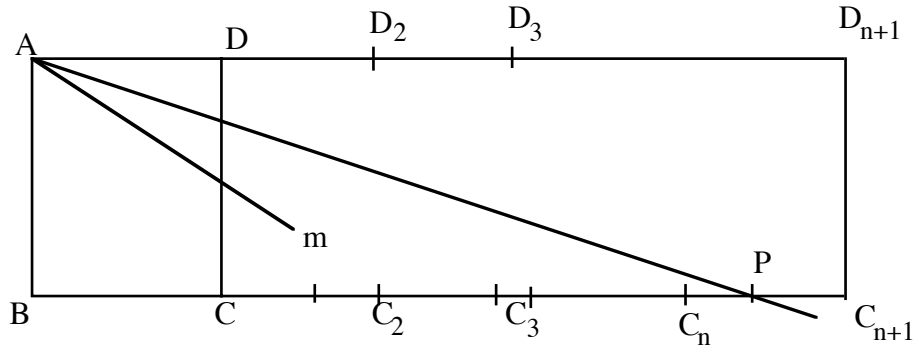
Théorème 5.6

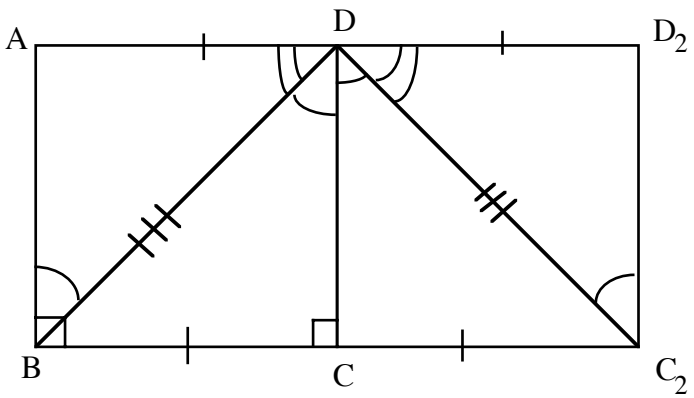
4 ⇒ 5.

Démonstration

Soit ABCD un rectangle. Nous allons montrer que la droite $(\dot{AD})$ est la seule parallèle à $d = (BC)$ menée par A. Il suffit de montrer que si m est une demi-droite d'origine A comprise entre [AB et [AD, elle coupe [BC (théorème 3.2). Soit P un point de [BC tel que $\widehat{APB} < \widehat{mAD}$ et vérifiant [B,C,P] (l'existence de P est prouvée dans le lemme 5.7).

Soient $C_1 = C, C_2, C_3$ ... des points de [BC tels que $C_iC_{i+1} = BC$. On suppose que P est entre C_n et C_{n+1} (par le postulat d'Archimède). On construit de même les points $D = D_1, D_2, D_3, \ldots$ sur la demi-droite AD tels que $D_iD_{i+1} = AD$. On vérifie facilement que ABC_kD_k est un rectangle





Par exemple pour $k = 2$: $\widehat{BCD} \equiv \mathfrak{d}$ donc $\widehat{C_2CD} \equiv \mathfrak{d}$

Les triangles BCD et C_2CD sont égaux donc $BD \equiv DC_2$. Donc $\widehat{BDC} \equiv \widehat{CDC_2}$ et par suite $\widehat{BDA} \equiv \widehat{C_2DD_2}$. Ainsi $BDA \equiv C_2DD_2$.

On en tire $\widehat{DBA} \equiv \widehat{DC_2D_2}$ et par suite $\widehat{CC_2D_2} \equiv \widehat{CBA} \equiv \mathfrak{d}$.

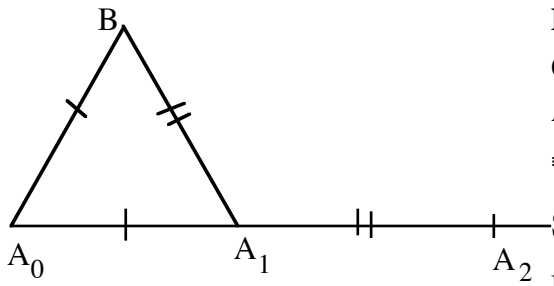
De même l'angle en D_2 est droit. Ainsi ABC_2D_2 est un rectangle et de même $ABC_{n+1}D_{n+1}$.

En appliquant 5.5, on voit que $A\widehat{C_{n+1}}B \equiv C_{n+1}\widehat{A}D_{n+1}$.

Par ailleurs : \O(APB;\s\UP11(∧)) > \O($AC_{n+1}B$;\s\UP11(∧)) (2.9) et $m\widehat{A}D > \widehat{A}PB$ (par hypothèse). Finalement $D_{n+1}\widehat{A}C_{n+1} < D_{n+1}\widehat{A}m$ donc la demi-droite m est entre [AB et $[AC_{n+1}$ donc elle coupe la droite $[BC_{n+1}]$.

Lemme 5.7

Soient d une demi-droite d'origine A_0 et B un point n'appartenant pas à la droite engendrée par d. Pour tout angle α il existe $C \in d$ tel que $B\widehat{C}A_0 < \alpha$.



Démonstration

On construit une suite de points A_0, A_1, A_2... sur d telle que $A_{n-1}A_n \equiv BA_{n-1}$.

Soit u l'angle $B\widehat{A_1}A_0$.

Les triangles BA_1A_2 et A_2A_1B sont égaux donc $A_1\widehat{B}A_2 \equiv A_1\widehat{A_2}B$. La somme des angles d'un triangle est majorée par $\mathfrak{p}$ donc, comme $B\widehat{A_1}A_2$ et $B\widehat{A_1}A_0$ sont supplémentaires, on voit que $2\, B\widehat{A_2}A_0 \leq u$.

De même $2\, B\widehat{A_3}A_0 \leq B\widehat{A_2}A_0$ donc $4\, B\widehat{A_3}A_0 \leq u$.

Par itération : $2^{k-1}\, B\widehat{A_k}A_0 \leq u$.

Si l'on suppose que $B\widehat{A_k}A_0 > \alpha$ pour tout k, l'assertion ci-dessus est une contradiction avec le postulat d'Archimède (qui se transpose aisément en terme d'angles).

Théorème 5.8

5 ⇒ 1.

Ce résultat est une conséquence de 5.9, 5.10, 5.11 ci-après.

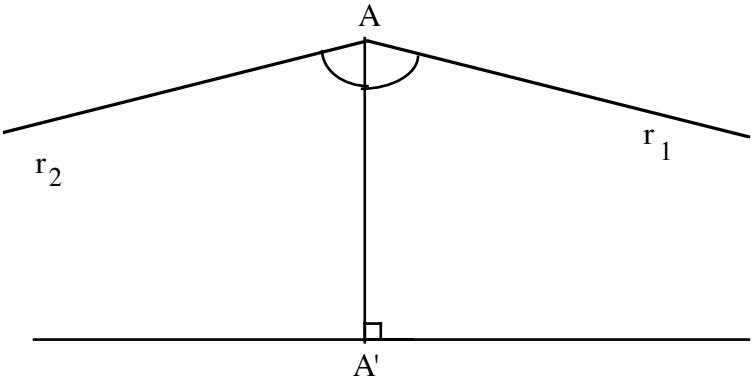
Auparavant nous avons besoin d'une définition.

Définition

Soient d une droite, A un point n'appartenant pas à d.

Soient A' le pied de la perpendiculaire à la droite d issue de A, (on dit que A' est la projection orthogonale de A sur d), r_1 et r_2 les deux demi-droites parallèles à d passant par A (Théorème 3.1).

*L'angle $(\widehat{[AA',r_1)}$ est égal à l'angle $(\widehat{[AA',r_2)}$. C'est l'**angle de parallélisme** pour le couple (A,d).*



L'égalité des deux angles est facile à voir en revenant à la définition de r_1 et r_2. Remarquons que l'angle de parallélisme est aigu ou droit et qu'il est droit si et seulement si on peut mener par A une seule parallèle à d.

Définition

La demi-droite p d'origine P est dite parallèle à la demi-droite q d'origine Q et on notera $p \,//\, q$ si l'une des assertions suivantes est vérifiée.

1) $p \subset q$ *ou* $q \subset p$.

2) *p et q sont dans un même demi-plan par rapport à (PQ) et p est parallèle à la droite engendrée par q.*

Théorème 5.9

Si p et q sont deux demi-droites telles que p est parallèle à q alors q est parallèle à p.

Théorème 5.10

Si p,q,r sont trois demi-droites portées par trois droites distinctes et telles que $p \,//\, q$ et $q \,//\, r$ alors $p \,//\, r$.

Tous ces résultats ont des démonstrations assez techniques mais d'inspiration voisine.

Nous admettrons 5.9 et 5.10 et démontrons le théorème 5.11 ci-après dont nous déduirons 5.8.

Théorème 5.11

Soient d_1 et d_2 deux droites, $A_1 \notin d_1$, $A_2 \notin d_2$, B_1 et B_2 respectivement les projections orthogonales de A_1 sur d_1 et de A_2 sur d_2.

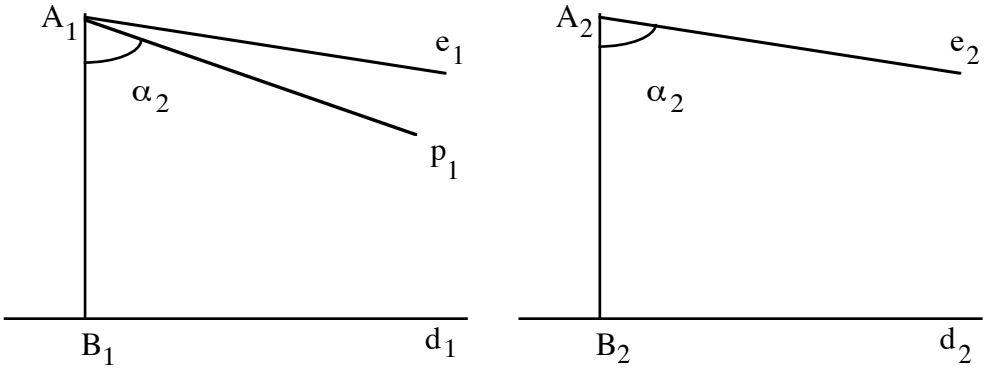
1) Si $A_1B_1 \equiv A_2B_2$, l'angle de parallélisme de (A_1,d_1) est égal à l'angle de parallélisme de (A_2,d_2).

2) Si $A_1B_1 < A_2B_2$, l'angle de parallélisme de (A_1,d_1) est supérieur ou égal à celui de (A_2,d_2).

Démonstration

Soient e_1 et e_2 respectivement des demi-droites d'origine A_1 et A_2 et parallèles à d_1 et d_2.

1) Soit $A_1B_1 \equiv A_2B_2$. Soient α_1 (resp. α_2) l'angle de parallélisme de (A_1,d_1) (resp. (A_2,d_2). Supposons $\alpha_1 > \alpha_2$. Il existe une demi-droite p_1 d'origine A_1 telle que $([A_1B_1,p_1) = \alpha_2$ et telle que p_1 soit comprise entre $[A_1B_1$ et e_1.



Par définition de α_1, p_1 coupe d_1 en un point Q_1.

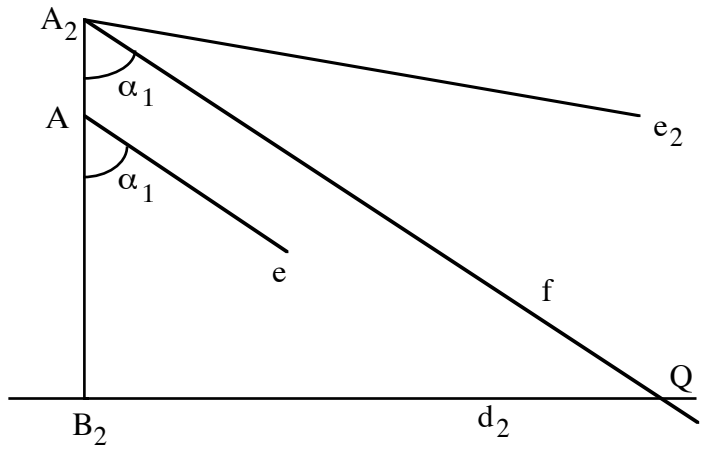
Soit Q_2 sur d_2 tel que $B_1Q_1 \equiv B_2Q_2$.

Les deux triangles $A_1B_1Q_1$ et $A_2B_2Q_2$ sont égaux donc $B_2\hat{A}_2Q_2 = B_1\hat{A}_1Q_1 = \alpha_2$ et ainsi $e_2 = [A_2Q_2$, c'est une contradiction.

Ainsi $\alpha_1 \leq \alpha_2$ et par symétrie $\alpha_1 \equiv \alpha_2$.

2) Soit $A_1B_1 < A_2B_2$. Soit A le point de $[A_2B_2]$ tel que $AB_2 \equiv A_1B_1$. Par ce qui précède, l'angle de parallélisme α_1 de (A,d_2) est le même que celui de (A_1,d_1). Supposons que $\alpha_2 > \alpha_1$. On désigne par e la parallèle à d_2 menée par A (dans toute cette démonstration on se limite une fois pour toutes à travailler dans un demi-plan selon (A_1B_1) ou (A_2B_2)).

Soit f une demi-droite d'origine A_2 faisant l'angle α_1 avec $[A_2B_2$.



Comme e_2 est parallèle à d_2, f coupe d_2 en Q. Comme e coupe un côté du triangle A_2B_2 Q elle coupe l'un des autres côtés. Or si elle coupe $[A_2Q]$ en R, la somme des angles de A_2AR est plus grande que $\mathfrak{p}$ (puisque $R\widehat{A_2}A + A_2\widehat{A}R \equiv \mathfrak{p}$) ce qui est impossible.

2

Ainsi e coupe $[B_2Q]$ mais c'est impossible puisque e est parallèle à d.

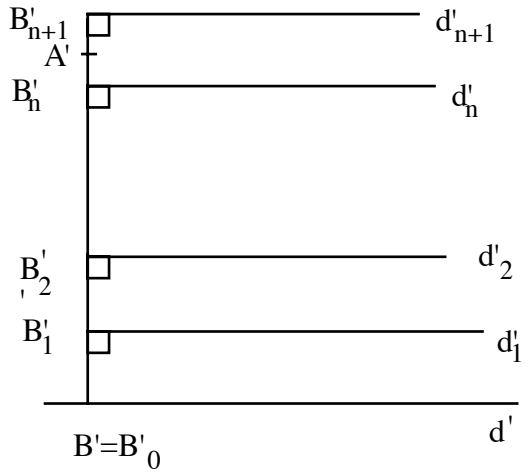
Finalement $\alpha_2 \leq \alpha_1$.

Démonstration de 5.8

Soient d une droite, A un point, $A \notin d$ tel que par A on puisse mener une seule parallèle à d. Soient d' une droite et A' un point tel que $A' \notin d'$. Soient B et B' respectivement les projections orthogonales de A sur d et A' sur d'.

• Si $AB \equiv A'B'$, l'angle de parallélisme de (A',d') est égal à celui de (A,d). C'est donc $\mathfrak{d}$ ainsi le postulat d'Euclide est vérifié pour le couple (A',d').

• Si $AB > A'B'$ l'angle de parallélisme en (A',d') est supérieur ou égal à $\mathfrak{d}$ et comme il ne peut être obtus il est égal à $\mathfrak{d}$. Là encore le postulat est vrai pour (A',d').



• Reste le cas où $AB < A'B'$: Par le postulat d'Archimède, on peut trouver des points $B'_0 = B'$, B'_1 , B'_2 ,..., B'_n , B'_{n+1} rangés dans cet ordre sur [B'A' tels que A' soit entre B'_n et B'_{n+1}.

Par B'_1 , B'_2 ,... on mène les perpendiculaires d'_1 , d'_2 ,... à B'_1 , B'_2 ...

Comme $B'_0 B'_1 \equiv BA$ l'angle de parallélisme de (B'_1,d') est le même que celui de (A,d) c'est-à-dire $\mathfrak{d}$. Donc d' est la parallèle à d' menée par B'_1. De même d'_{i+1} est la parallèle à d'_i menée

par B'_{i+1} et par conséquent d'_{i+1} est parallèle à d' (5.10). De plus $A'B'_n \leq AB$ donc l'angle de parallélisme pour (A',d'_n) est supérieur ou égal à $\mathfrak{d}$ donc est égal à $\mathfrak{d}$. Ainsi l'angle de parallélisme pour (A',d') est $\mathfrak{d}$ c'est-à-dire que le postulat d'Euclide est satisfait.

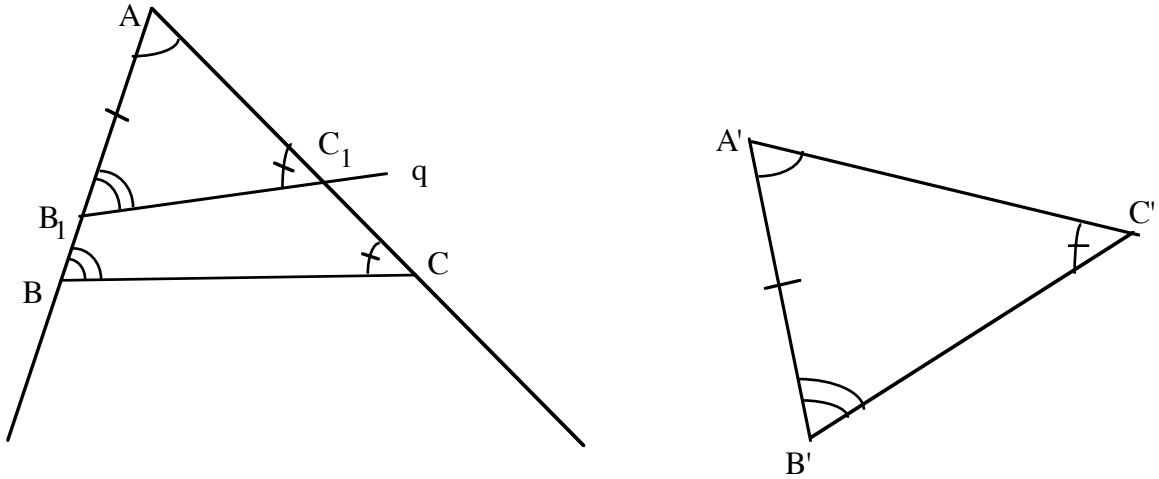
Cela termine les considérations sur le postulat d'Euclide.

On remarquera que la différence entre géométrie hyperbolique et géométrie euclidienne peut être symbolisée par la différence entre le trapèze de Sacchieri et le rectangle.

Signalons un dernier résultat significatif des propriétés des géométries hyperboliques.

Théorème 5.12

Soient deux triangles ABC et A'B'C' dans une géométrie hyperbolique tels que $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$. *Alors ABC ≡ A'B'C' AB ≡ A'B', BC ≡ B'C', CA ≡ C'A').*



Si le résultat est faux, supposons par exemple que AB > A'B'. Soit $B_1 \in [AB]$ tel que $AB_1 \equiv A'B'$. Soit q une demi-droite d'origine B_1 telle que $\widehat{AB_1q} \equiv \widehat{A'B'C'}$, q dans le même demi-plan que C. Cette demi-droite ne peut couper [BC] donc elle coupe [AC] en un point C_1. Les deux triangles AB_1C_1 et A'B'C' sont égaux donc leurs angles sont égaux. On voit alors facilement que la somme des angles du quadrilatère B_1BCC_1 est égal à $2\mathfrak{p}$. Donc la somme des angles de l'un des triangles BB_1C et B_1CC_1 est au moins égal à $\mathfrak{p}$ ce qui contredit l'hypothèse que la géométrie est hyperbolique.

III - LA STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

Dans ce dernier chapitre on se place dans un plan $\mathbb{P}$ vérifiant les axiomes d'ordre et de congruence (mais pas nécessairement l'axiome de continuité). A partir du § 7, on supposera vérifié le postulat d'Euclide.

Notre propos est de montrer que le plan $\mathbb{P}$ est nécessairement un espace vectoriel sur un corps K, espace et corps étant définis par les propriétés de la géométrie et plus précisément par les propriétés des isométries que nous allons introduire. Une autre approche d'un phénomène analogue est fondé sur les propriétés des translations et homothéties : ce point de vue est développé par exemple dans Artin (Algèbre géométrique, chapitre II).

§ 6 - SYMETRIES. ISOMETRIES

Symétries

Théorème 6.1

Soit d une droite. A tout point A de $\mathbb{P}$ on peut associer un point B unique tel que d soit la médiatrice de [AB]. On dit que B est ***le symétrique*** *de A par rapport à d. On note σ_d l'application ainsi définie. La droite est l'axe de la symétrie.*

Démonstration

On mène par A la perpendiculaire d' à d. Cette droite coupe d en M et le point B est défini par [A,M,B] et AM ≡ MB.

Théorème 6.2

Soient d une droite, σ_d la symétrie associée.

1) σ_d est involutive (donc bijective).

2) $\forall A, \forall B, \sigma_d(A)\,\sigma_d(B) \equiv AB$.

3) Si d' est une droite, $\sigma_d(d')$ est une droite.

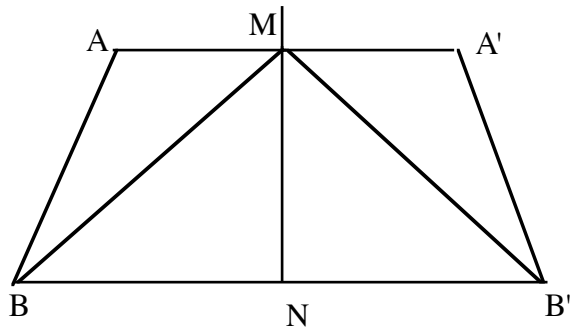
4) $d' \perp d'' \Rightarrow \sigma_d(d') \perp \sigma_d(d'')$. Plus généralement, σ_d conserve les angles.

5) $d = \{M | \sigma_d(M) = M\}$.

Démonstration

On note $A' = \sigma_d(A)$, $B' = \sigma_d(B)$,....

1) est évident.



2) Se voit sur la figure ci-contre. On montre d'abord que les triangles MBN et MB'N sont égaux puis que AMB ≡ A'MB'.

3) Il suffit de montrer que si A,B et C sont alignés, il en est de même de A', B' et C'. Or, à cause de 2), ABC ≡ A'B'C' et ainsi A',B',C' sont alignés par 2.4.

4) Comme σ_d envoie les droites sur les droites et conserve les longueurs, elle conserve les angles puisque la congruence entre les angles est définie en termes de longueur.

5) C'est évident.

Définition

Une application φ de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ qui conserve les longueurs ($\forall A, \forall B, AB \equiv \varphi(A)\varphi(B)$) est appelée isométrie.

Ainsi les symétries sont des isométries de même que les composées de symétries.

Structure des isométries (1)

Théorème 6.3

Une isométrie qui laisse fixes trois points non alignés est l'identité.

Démonstration

Si φ est une isométrie laissant fixes A, B, C et n'est pas l'identité, on peut trouver M tel que $M \neq \varphi(M)$. Comme les longueurs sont conservées et comme $A = \varphi(A)$ on a $AM \equiv A\varphi(M)$ donc A est sur la médiatrice de $[M\varphi(M)]$. Il en est de même pour B et C ce qui contredit l'hypothèse.

Proposition 6.4

Une isométrie qui laisse fixes deux points distincts A et B est soit l'identité, soit la symétrie d'axe (AB).

Démonstration

Soit $C \notin (AB)$. Si $\varphi(C) = C$, φ laisse fixes trois points non alignés et c'est l'identité. Si $\varphi(C) = C' \neq C$, comme $\varphi(A) = A$ et $\varphi(B) = B$, on voit que $d = (AB)$ est la médiatrice de CC'. Donc $C' = \sigma_d(C)$ et $\sigma_d\varphi$ laisse fixes A, B et C donc c'est l'identité i.e. $\varphi = \sigma_d$.

Théorème 6.5

Soient A, B, C trois points non alignés et A', B', C' trois points tels que $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $CA \equiv C'A'$. Il existe une isométrie θ unique telle que $\theta(A) = A'$, $\theta(B) = B'$, $\theta(C) = C'$. Cette isométrie est produit d'au plus trois symétries.

Démonstration

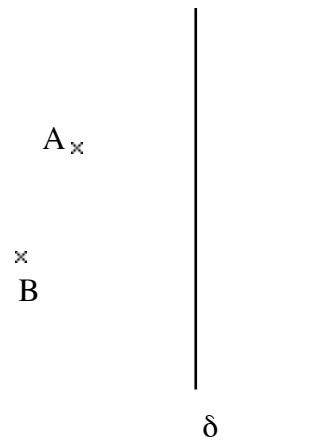
Voyons d'abord ce qui se passe dans le cas de deux points.

Lemme 6.6

Soient A et B deux points distincts et A', B' deux points tels que $AB \equiv A'B'$. Il existe une isométrie ψ qui est soit une symétrie, soit le produit de deux symétries et telle que $\psi(A) = A'$ et $\psi(B) = B'$. Si φ est une isométrie telle que $\varphi(A) = A'$ et $\varphi(B) = B'$, on a $\varphi = \psi$ où $\varphi = \psi\sigma_d$ avec $d = (AB)$.

Démonstration du lemme

Soit δ la médiatrice de $[AA']$ (ou une droite quelconque passant par A si $A = A'$). La symétrie σ_δ applique A sur A' et B sur B_1. Si $B_1 = B'$ on pose $\psi = \sigma_\delta$.



Sinon on a : $AB \equiv A'B'$ et $AB \equiv A'B_1$ donc A' est sur la médiatrice δ' de $[B_1B']$. Donc $\sigma_{\delta'}$ applique B_1 sur B' et A' sur lui-même. Dans ce cas $\psi = \sigma_{\delta'}\sigma_\delta$.

Si φ est comme dans l'énoncé, $\psi^{-1}\varphi$ laisse fixes les deux points A et B et on a la conclusion du lemme par la proposition 6.4.

On peut alors montrer le théorème. L'isométrie ψ du lemme applique C sur C_1. Si $C_1 = C'$ on pose $\theta = \psi$. Sinon on voit que A' et B' sont sur la médiatrice δ'' de $[CC']$ donc $\sigma_{\delta''}\psi = \theta$ convient. Notons que θ est inversible.

Si θ' est une isométrie vérifiant $\theta'(A) = A'$, $\theta'(B) = B'$ et $\theta'(C) = C'$, l'isométrie $\theta^{-1}\theta'$ a trois points fixes A', B', C' non alignés donc est l'identité. Ainsi $\theta' = \theta$.

Théorème 6.6

Toute isométrie de $\mathbb{P}$ est produit d'au plus trois symétries. Ainsi toute isométrie est inversible et son inverse est une isométrie. L'ensemble des isométries de $\mathbb{P}$ est un groupe pour la loi de composition que l'on notera $I(\mathbb{P})$.

Démonstration

Si θ est une isométrie de $\mathbb{P}$, si ABC est un triangle, on a $A' = \theta(A)$, $B' = \theta(B)$, $C' = \theta(C)$. Les points A, B, C, A', B', C' vérifient les hypophèses de 6.5 donc θ est l'unique isométrie appliquant (A,B,C) sur (A',B',C'). Elle est donc produit d'au plus trois symétries.

Demi-tours

Proposition 6.7

Soient d et d' deux droites perpendiculaires. Appelons O leur point d'intersection. Alors :

1) $\sigma_d \sigma_{d'} = \sigma_{d'} \sigma_d$.

2) Pour tout point M de P, le point O est le milieu de $[M\ \sigma_d \sigma_{d'}(M)]$.

3) O est le seul point fixe de $\sigma_d \sigma_{d'}$.

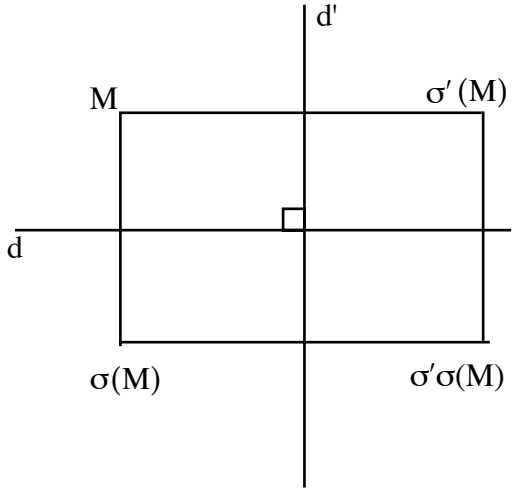
Démonstration

Posons $\sigma = \sigma_d$ et $\sigma' = \sigma_{d'}$.

1) Supposons d'abord que $M \in d \cup d'$, par exemple $M \in d$. Alors $\sigma'(M) \in d$ et :

$$\sigma\sigma'(M) = \sigma'(M) = \sigma'\sigma(M).$$

Si $M \notin d \cup d'$:



Nous allons montrer que $\sigma(\sigma'(M)) = \sigma'\sigma(M)$.

La droite d est médiatrice de $[M\sigma(M)]$. Comme σ' conserve les angles et les longueurs, $\sigma'(d)$ est médiatrice de $[\sigma'(M)\sigma'\sigma(M)]$. Mais $d \perp d'$ donc $\sigma'(d) = d$. Ainsi d est médiatrice de $[\sigma'(M)\sigma'\sigma(M)]$. Par suite $\sigma'\sigma(M)$ est l'image de $\sigma'(M)$ par σ.

2) On a $\sigma\sigma'(M) = \sigma'\sigma(M)$ pour tout M donc, comme $\sigma^{-1} = \sigma$ et $\sigma'^{-1} = \sigma'$, $\sigma\sigma'\sigma\sigma'(M) = M$. Ainsi $\sigma\sigma'$ échange M et $\sigma\sigma'(M)$ donc elle laisse fixe le milieu de l'intervalle $[M\ \sigma\sigma'(M)]$.

3) O est évidemment fixe pour $\sigma\sigma'$. Si M est un point fixe pour $\sigma\sigma'$ et si, par exemple, M n'est pas sur d', σ' applique M sur $\sigma'(M)$ donc d' est médiatrice de $[M\sigma'(M)]$ et σ applique $\sigma'(M)$ sur M donc d est médiatrice de $[M\sigma'(M)]$ ce qui est absurde. Donc $\{M\} = d \cap d'$.

Définition

Si O est un point de $\mathbb{P}$, l'application s_0 de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ qui à M associe M' tel que O soit le milieu de [MM'] est le demi-tour de centre O (ou la symétrie centrale par rapport à O). C'est une isométrie que l'on peut écrire $\sigma_d\sigma_{d'}$ où d est une droite quelconque passant par O , et d' passe par O et est perpendiculaire à d.

Proposition 6.8

s_0 est involutive. Si p est une droite et si $O \notin p$, p et $s_0(p)$ n'ont aucun point en commun. (Elles sont donc parallèles si le postulat d'Euclide est satisfait).

Démonstration

Le premier point est clair à cause de 6.7.

Soit M un point de $p \cap s_0(p)$. Alors $s_0(M) \in p$ donc le milieu O de $Ms_0(M)$ est dans p, c'est contraire à l'hypothèse.

Rotations

Pour $C \in \mathbb{P}$, on note $O_C(P)$ ou O_C l'ensemble des isométries de $\mathbb{P}$ qui laissent fixe le point C. C'est un sous-groupe de $I(\mathbb{P})$: c'est le **stabilisateur** de C dans $I(\mathbb{P})$.

Proposition 6.9

Si $\varphi \in I_C(\mathbb{P})$, φ est l'identité ou $\varphi = \sigma_d$ ou $\varphi = \sigma_{d'}\sigma_d$, d et d' étant des droites passant par C. De plus, si $\varphi = \sigma_d\sigma_{d'}$ avec $d \neq d'$, le point C est le seul point fixe de φ.

Démonstration

Si $\varphi \neq \mathrm{Id}$, soit $A \in \mathbb{P}$ et $A \neq C$.

Si $\varphi(A) = A$ alors $\varphi = \sigma_d$ avec $d = (AC)$ (6.4).

Sinon $\varphi(A) = A' \neq A$. Dans ce cas, on a $CA \equiv CA'$ donc, en désignant par d' la médiatrice de $[AA']$. $\sigma_{d'}\varphi$ a deux points fixes C et A donc est la symétrie σ_d où $d = (AC)$.

Il est clair que $\sigma_{d'}\sigma_d$ admet C comme point fixe. Si B est un autre point fixe, $\sigma_{d'}(B) = \sigma_d(B)$ donc $d = d'$ car c'est la médiatrice de $[B\ \sigma_d(B)]$.

Proposition 6.10

Soient d_1, d_2, d_3 des droites passant par un point C.

On pose $\sigma_i = \sigma_{d_i}$. Le produit $\varphi = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ est une symétrie d'axe d passant par C.

Démonstration

Soit A un point de d_3. Désignons par δ la droite d_3 si $\varphi(A) = A$ et la médiatrice de $[AB]$ si $\varphi(A) = B$. Soit $\psi = \sigma_\delta\varphi$. Il est clair que C et A sont des points fixes pour ψ. Donc $\psi = \mathrm{Id}$ où $\psi = \sigma_3$. Dans ce deuxième cas, $\sigma_\delta\ \sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3 = \sigma_3$ donc $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_\delta$ c'est impossible car $\sigma_1\sigma_2$ n'a qu'un point fixe. Finalement $\psi = \mathrm{Id}$ donc $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma_\delta$.

Remarque

Ce résultat est souvent utilisé sous la forme suivante :

Si d_1, d_2, d_3 sont des droites passant par C, il existe une droite δ passant par C telle que $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_\delta\sigma_3$. Tout aussi bien, il existe une droite δ' passant par C telle que $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3\sigma_{\delta'}$.

Théorème 6.11

Soit C un point de $\mathbb{P}$. L'ensemble formé par les isométries de la forme $\sigma_d\ \sigma_{d'}$ où d et d' sont deux droites passant par C est un sous-groupe commutatif d'indice 2 de $O_C(\mathbb{P})$ noté $O_C^+(\mathbb{P})$. C'est le groupe des rotations de $\mathbb{P}$ de centre C.

Démonstration

Grâce à 6.10, le produit de quatre symétries d'axes passant par C peut s'écrire comme produit de deux symétries. L'inverse de $\sigma_d\ \sigma_{d'}$ est $\sigma_{d'}\ \sigma_d$. Ainsi $O_C^+(\mathbb{P})$ est un sous-groupe

de $O_C(\mathbb{P})$. La proposition 6.9 implique que l'indice de ce sous-groupe est 2.Si $\varphi = \sigma_1\sigma_2$ est une rotation de centre C et σ une symétrie d'axe passant par C, on peut écrire $\sigma_1\sigma_2 = \tau\sigma$ pour une symétrie convenable τ dans $O_C(\mathbb{P})$. Ainsi $\sigma\varphi\sigma = \sigma\tau\sigma\sigma = \sigma\tau = \varphi^{-1}$. Soient alors deux rotations φ_1 et φ_2 de centre C, $\varphi_1 = \tau_1\tau_2$ et $\varphi_2 = \sigma_1\sigma_2$. On a successivement :

$$\varphi_1\varphi_2 = \tau_1\tau_2\sigma_1\sigma_2 = \tau_1(\tau_2\sigma_1)\sigma_2 = \tau_1\sigma_2(\tau_2\sigma_1)^{-1}$$

$$= \tau_1(\sigma_2\sigma_1)\tau_2 = \sigma_1\sigma_2\tau_1\tau_2 = \varphi_2\varphi_1.$$

Structure des isométries (2)

Proposition 6.12

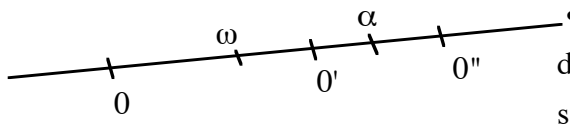
Soient O, O', O'' trois points alignés sur une droite d.
Il existe $\omega \in d$ tel que $s_{0''}\, s_{0'}\, s_0 = s_\omega$.

Démonstration

Nous désignerons par s, s', s" les trois demi-tours s_0, $s_{0'}$, $s_{0''}$. Le résultat est évident si O' = O". Nous supposons donc que O' ≠ O". Soit α le point s"s'(O). Nous allons montrer que le point cherché est le milieu ω de $[O,\alpha]$.

Soit φ l'isométrie $s's''s_\omega$. Nous avons donc à montrer que $\varphi = s_0$.

• $\varphi(0) = s's''s_\omega(O) = s's''(\alpha) = 0$.



• $\varphi(\omega) \neq \omega$: Si $\varphi(\omega) = \omega$, $s's''(\omega) = \omega$ donc $s''(\omega) = s'(\omega)$. Les points O' et O" sont alors confondus au milieu de $[\omega\ s'(\omega)]$ ce qui est exclus.

• O est le seul point de d invariant par φ : s'il y a deux points invariants sur d, φ est l'identité sur σ_d et ce n'est pas possible puisque $\varphi(\omega) \neq \omega$.

• Soit alors $A \notin d$.

Supposons que $\varphi(A) = A$. Alors :

ω est le milieu de $[A\ s_\omega(A)]$,

O" est le milieu de $[s_\omega(A)\ \ s''\ s_\omega(A)]$,

O' est le milieu de $[s''\ s_\omega(A)\ \ s'\ s''\ s_\omega(A)] = [A\ \ s''\ s_\omega(A)]$

Comme ω, O" et O' sont alignés sur d, les points A, $s_\omega(A)$ et $s''\ s_\omega(A)$ sont alignés sur d donc $A \in d$ ce qui est contraire à l'hypothèse donc $\varphi(A) \neq A$.

• φ est donc une isométrie qui a un seul point fixe O, on peut écrire $\varphi = \sigma_1\sigma_d$ ou σ_1 est une symétrie d'axe d_1 passant par O (6.10, Remarque).

• Comme $\varphi(d) = d$, si $B \in d$ et $B \neq 0$, $\varphi(B) \in d$.

Donc d_1 est la médiatrice de $[B\ \varphi(B)]$ donc est perpendiculaire à d. Ainsi φ est le demi-tour de centre 0.

Corollaire 6.13

Soient d, d', d" trois droites perpendiculaires à une droite δ. Il existe une droite δ' perpendiculaire à δ telle que $\sigma_{d''}\,\sigma_{d'}\,\sigma_d = \sigma_{\delta'}$.

Démonstration

Posons $O = d \cap \delta$, $O' = d' \cap \delta$, $O'' = d'' \cap \delta$.

On notera $\sigma = \sigma_d$, $\sigma' = \sigma_{d'}$, $\sigma'' = \sigma_{d''}$, $s = s_0$ ...

On a :

$$\sigma''\,\sigma'\,\sigma = \sigma_\delta\,\sigma_\delta\,\sigma''\,\sigma'\,\sigma_\delta\,\sigma_\delta\,\sigma$$

$$= \sigma_\delta\, s''\, s'\, s = \sigma_\delta\, s_\omega \quad (\text{avec } \omega \in \delta)$$

$$= \sigma_\delta\,\sigma_\delta\,\sigma_{\delta'} = \sigma_{\delta'}\,.$$

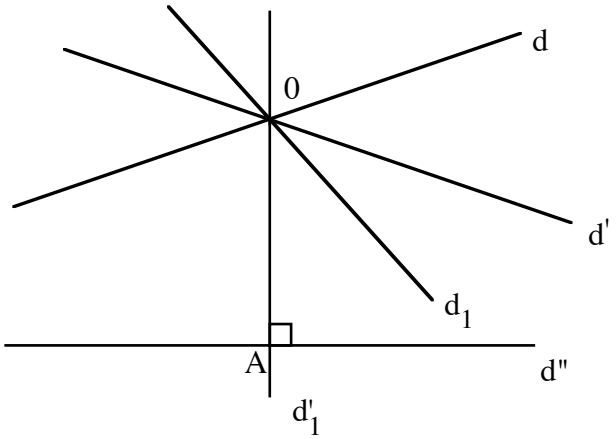
Théorème 6.14

Soient d, d', d" trois droites. Il existe trois droites d_1, d_2, d_3 *telles que* $d_1 \perp d_3$, $d_2 \perp d_3$ *et vérifiant :*

$$\sigma_d\,\sigma_{d'}\,\sigma_{d''} = \sigma_{d_1}\,\sigma_{d_2}\,\sigma_{d_3}\,.$$

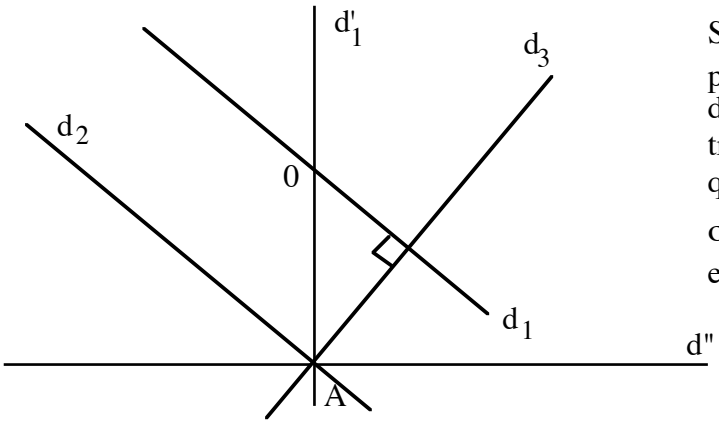
Démonstration

On notera $\sigma_d = \sigma$, $\sigma_{d_1} = \sigma_1$ ...



1er cas : Supposons que d et d' se coupent en un point O. On mène par O la perpendiculaire d_1' à d". On peut trouver une droite d_1 telle que $\sigma_1\,\sigma_1' = \sigma\sigma'$ et $d_1 \ni O$.

Donc $\sigma\sigma'\sigma'' = \sigma_1\,\sigma_1'\,\sigma''$ et $d_1' \perp d''$.

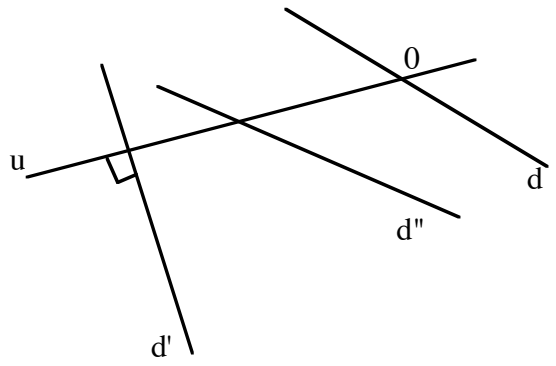


Soit $A = d_1' \cap d''$. On mène par A la perpendiculaire d_3 à d_1. On peut donc trouver une droite d_2 telle que :

$\sigma_1'\,\sigma'' = \sigma_2\sigma_3$ et $d_3 \perp d_2$ et ainsi :

$$\sigma\sigma'\sigma'' = \sigma_1\sigma_1'\,\sigma'' = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \text{ et } d_1 \perp d_3,\ d_2 \perp d_3.$$

On raisonne de manière analogue si d' et d" sont concourantes.



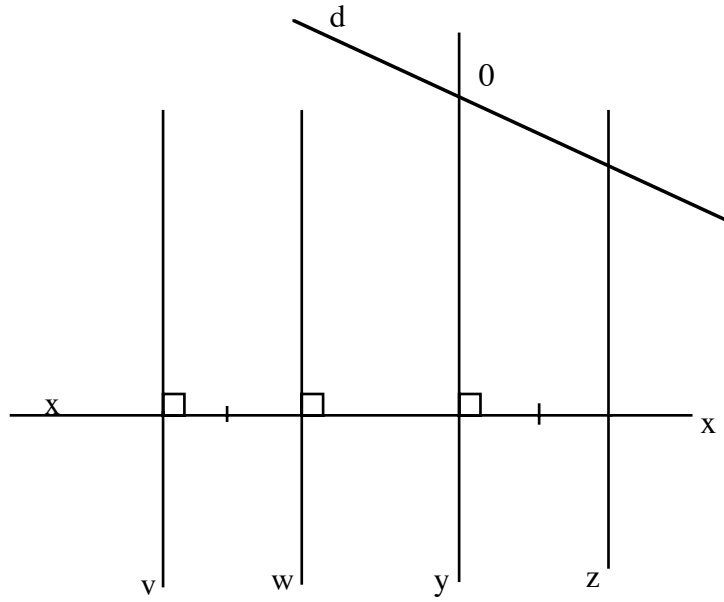
2ème cas : On suppose que d et d' d'une part, d' et d" d'autre part ne sont pas sécantes. On va se ramener au 1er cas ce qui permettra de conclure.

Soient 0 un point de d et u la perpendiculaire à d' passant par 0. On a :

$\sigma'\sigma_u = \sigma_u\sigma'$ donc $\sigma\sigma'\sigma'' = \sigma\sigma_u\sigma'\sigma_u\sigma''$.

On applique le 1er cas au triplet d', u, d". On peut trouver trois droites v,w,x telles que $v \perp x$, $w \perp x$, et

$$\sigma\sigma'\sigma'' = \sigma\sigma_u\sigma_v\sigma_w\sigma_x$$



Soit alors y la perpendiculaire à x passant par 0. Comme v, w et y sont perpendiculaires à x, on peut trouver z perpendiculaire à x telle que $\sigma_v\sigma_w = \sigma_y\sigma_z$ (6.13).

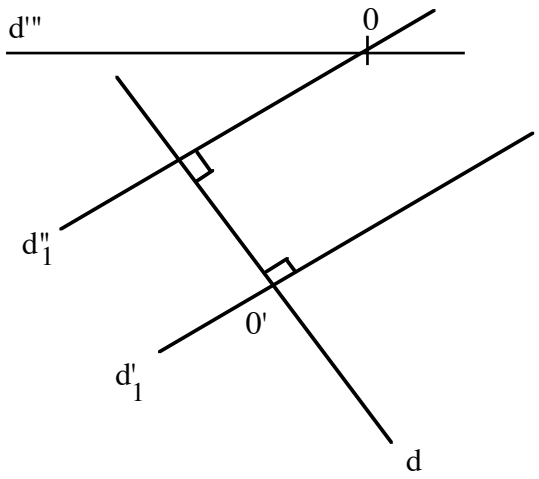
Ainsi : $\sigma\sigma'\sigma'' = \sigma\sigma_u\sigma_y\sigma_z\sigma_x$. Or les trois droites d, u et y passent par 0. Il existe donc une droite t telle que $\sigma\sigma_u\sigma_y = \sigma_t$. Finalement $\sigma\sigma'\sigma'' = \sigma_t\sigma_z\sigma_x$, les deux droites z et x sont concourantes, l'isométrie peut donc s'écrire (1er cas) sous la forme proposée.

Théorème 6.15

Tout produit de quatre symétries peut s'écrire comme un produit de deux symétries.

Démonstration

Un tel produit peut s'écrire $\varphi = \sigma\sigma'\sigma''\sigma'''$ avec $d \perp d'$ et $d \perp d''$. Soit $O \in d'''$ et désignons par d_1'' , la perpendiculaire à d menée par O. Le corollaire 6.13 nous permet d'écrire $\sigma_1'\sigma_1'' = \sigma'\sigma''$ avec $d_1' \perp d$.



Ainsi : $\varphi = \sigma\sigma'_1\sigma''_1\sigma'''$. Si O' est le point d'intersection de d et d'_1, φ apparaît comme le produit de la rotation $\sigma\sigma'_1$ de centre O' et de la rotation $\sigma''_1\sigma'''$ de centre O. Soit δ la droite (OO'). On peut trouver δ' contenant O' et δ'' contenant O telles que :

$\sigma\sigma'_1 = \sigma_{\delta''}\,\sigma_\delta$ et $\sigma''\,\sigma''' = \sigma_\delta\,\sigma_{\delta'}$. Ainsi $\varphi = \sigma_{\delta''}\,\sigma_{\delta'}$.

Théorème 6.16

Les isométries qui peuvent s'écrire comme produit d'un nombre pair de symétries peuvent s'écrire comme produit de deux symétries. Elles forment un sous-groupe d'indice 2 de $I(\mathbb{P})$ noté $I^+(\mathbb{P})$. Ce sont les ***déplacements*** *de $\mathbb{P}$. Le complémentaire de $I^+(\mathbb{P})$ dans $I(\mathbb{P})$ est l'ensemble des anti-déplacements de $\mathbb{P}$.*

Démonstration

Il suffit de vérifier, compte tenu de ce que nous savons, que $I^+(\mathbb{P}) \neq I(\mathbb{P})$. Sinon toute symétrie σ peut s'écrire $\sigma''\sigma'$ c'est-à-dire $\sigma\sigma'\sigma'' = \mathrm{Id}$. En appliquant 6.14 on peut supposer que $d'' \perp d$ et $d'' \perp d'$. Mais $\sigma = \sigma''\sigma'$ n'est pas possible car $\sigma''\sigma'$ a un seul point fixe et σ a une droite de points fixes.

Angles (2ème point de vue)

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des rotations, $\mathcal{R} = \bigcup 0^+_c(\mathbb{P})$, la réunion étant prise pour tous les $C \in \mathbb{P}$. Sur l'ensemble $\mathcal{R}$ on définit une relation d'équivalence par : $r \sim r'$ si et seulement s'il existe $\varphi \in I^+(\mathbb{P})$ tel que $r = \varphi^{-1}\, r'\, \varphi$.

Une classe pour cette relation est un "**angle de rotation**" ; deux rotations de la même classe "ont le même angle".

Proposition 6.17

Si α est un angle de rotation, si C est un point, il existe une rotation et une seule de centre C et d'angle α.

Démonstration

Puisque φ est un angle de rotation, il existe une rotation r' de centre C' et d'angle α.

Soit φ un élément de $I^+(\mathbb{P})$ tel que $\varphi(C) = C'$ (par exemple $\varphi = \sigma_d\, \sigma_{d'}$ où d est la médiatrice de $[CC']$ et d' est la perpendiculaire à (CC') passant par C). Alors $\varphi^{-1}\, r'\, \varphi$ admet C comme point fixe, c'est un produit d'un nombre pair de symétries donc c'est une rotation de centre C et d'angle α.

Si r_1 et r_2 sont deux rotations de centre C et d'angle α, il existe $\varphi \in I^+(\mathbb{P})$ tel que $r_1 = \varphi^{-1}\, r_2\, \varphi$. On doit avoir $\varphi(C) = C$: $\varphi r_1(C) = \varphi(C) = r_2\, \varphi(C)$. Donc $\varphi(C)$ est le point fixe de r_2 donc est égal à C. Ainsi φ est une rotation de centre C, donc elle commute à r_2 donc $r_1 = r_2$.

Angles (3ème point de vue)

Sur les couples (d,d') de droites concourantes ou confondues, on définit une relation d'équivalence par :

$(d_1,d_2) \sim (d_1', d_2')$ si et seulement s'il existe $\varphi \in I^+(\mathbb{P})$ tel que $\varphi(d_1) = d_1'$ et $\varphi(d_2) = d_2'$. Une classe pour cette relation est un "**angle de droites**". Un représentant d'une classe est noté $\widehat{(d_1,d_2)}$.

Si d et d' sont deux droites concourantes on leur associe la rotation $\sigma_{d'}\, \sigma_d$. Si $\widehat{(d,d')} = \widehat{(d_1, d_1')}$ les deux rotations ainsi définies ont le même angle :

En effet, il existe $\varphi \in I^+(P)$ telle que $\varphi(d) = d_1$ et $\varphi(d') = d_1'$. Alors :

$$\sigma_{d_1'}\, \sigma_{d_1} = \sigma_{\varphi(d')}\, \sigma_{\varphi(d)} = (\varphi\sigma_{d'}\, \varphi^{-1})(\varphi\sigma_d\, \varphi^{-1}) = \varphi\, \sigma_{d'}\, \sigma_d\, \varphi^{-1}.$$

On définit ainsi une application f de l'ensemble $\mathcal{A}'$ des angles de droites dans l'ensemble $\mathcal{A}$ des angles de rotation.

Théorème 6.18

L'application $f : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ ainsi définie est bijective.

Démonstration

1) f est injective : Supposons que $\sigma'\sigma$ et $\sigma_1'\, \sigma_1$ sont deux rotations de même angle (on a repris les notations ci-dessus avec la convention $\sigma_{d'} = \sigma'$ ...). Il existe donc $\varphi \in I^+(\mathbb{P})$ telle que

$$\sigma_1'\, \sigma_1 = \varphi\, \sigma'\sigma\, \varphi^{-1} = \varphi\, \sigma'\varphi^{-1}\, \varphi\, \sigma\, \varphi^{-1}.$$

Soient $\varphi\sigma'\varphi^{-1} = \sigma'_2$, $\varphi\sigma\varphi^{-1} = \sigma_2$ où σ'_2 et σ_2 sont les deux symétries par rapport aux droites $d'_2 = \varphi(d')$ et $d_2 = \varphi(d)$. Ces deux droites se coupent en $C = d_1 \cap d'_1$ (puisque $\sigma'_1\sigma_1 = \sigma'_2\sigma_2$). Or, par la proposition 6.10, il existe une rotation θ qui applique d'_2 sur d'_1 et nécessairement $\theta(d_2) = d_1$ (toujours à cause de $\sigma'_1\sigma_1 = \sigma'_2\sigma_2$).

Quitte à remplacer φ par $\theta\varphi$ on peut donc supposer que $\varphi(d) = d_1$.

Mais alors :

$$\varphi\sigma'\sigma\varphi^{-1} = \varphi\sigma'\varphi^{-1}\varphi\sigma\varphi^{-1} = \varphi\sigma'\varphi^{-1}\sigma_1 = \sigma'_1\sigma_1.$$

Par suite $\varphi\sigma'\varphi^{-1} = \sigma'_1$ et on en tire que $\varphi(d') = d'_1$ c'est--à-dire que $(\widehat{d'_1,d'_1})$.

2) **φ est surjective** : Cela est évident car toute rotation est composée de deux symétries d'axes concourants.

Remarques

1) Si C est un point de $\mathbb{P}$, l'ensemble des rotations de centre C est un groupe (6.11) en bijection avec l'ensemble $\mathcal{A}$ des angles de rotation (6.17.1). Donc on peut par transport de structure munir l'ensemble $\mathcal{A}$ d'une structure de groupe.

2) Et alors, par le théorème 6.18, $\mathcal{A}'$ peut aussi être muni d'une structure de groupe par transport de structure.

Cette structure peut être décrite comme suit : soient α et α' deux angles de droites. On peut supposer que $\alpha = (\widehat{d_1,d_2})$ et $\alpha' = (\widehat{d_2,d_3})$. Alors $\alpha+\alpha' = (\widehat{d_1,d_3})$.

3) Désignons par $\mathcal{A}''$ l'ensemble des classes de secteur angulaires pour la relation de congruence (chapitre I, § 1 et 2). Cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des secteurs angulaires de sommet C (à cause de L1 appliqué aux angles). Par ailleurs, si p_1 et p_2 sont deux demi-droites d'origine C il est aisé de voir qu'il existe une rotation r et une seule de centre C et telle que $r(p_1) = p_2$: si δ est la droite bissectrice de $(\widehat{p_1,p_2})$ et d_1 la droite engendrée par p_1 on prend $r = \sigma_\delta\, \sigma_{d_1}$. De plus $r^{-1}(p_2) = p_1$. Si α est l'angle de r, celui de r^{-1} est $-\alpha$ (au sens de la structure de groupe sur A). Et $\mathcal{A}''$ apparaît comme l'ensemble $\mathcal{A}$ dans lequel on a identifié α et $-\alpha$.

La situation dans le modèle de Poincaré

On vérifie facilement que les deux applications f et g définies par :

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad\text{-}bc > 0)$$

$$g(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \quad (a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad\text{-}bc < 0)$$

sont des bijections de $\mathbb{H}$ qui conservent la longueur. Pour ce dernier point on utilise la formule

$$\ell(A,B) = \left| \log \left(\frac{b-p}{b-q} : \frac{a-p}{a-q} \right) \right| \quad \text{(Théorème 2.16)}$$

et on montre que le "birapport" des quatre points A,B,P,Q c'est-à-dire $\frac{b-p}{b-q} : \frac{a-p}{a-q}$ est conservé par f et g. $\left(\text{On pourra simplifier les calculs en posant } \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{1}{c}\frac{bc-ad}{cz+d}\right)$.

Ainsi f et g sont des isométries de $\mathbb{H}$. En particulier les "symétries euclidiennes" par rapport aux droites de la forme $\operatorname{Re} z = x_0$ sont de ce type : elles s'écrivent $f(z) = 2x_0 - \bar{z}$.

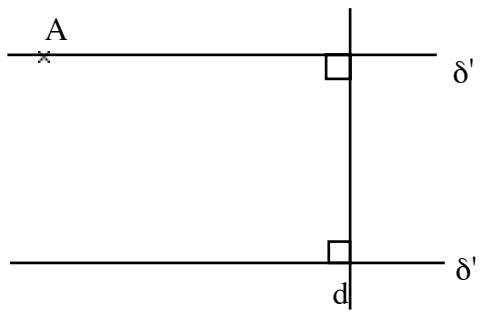
L'application $z \to \frac{1}{\bar{z}}$ (qui du point de vue euclidien est l'inversion de centre O de puissance 1, est une isométrie involutive de $\mathbb{H}$ c'est-à-dire une symétrie. Son axe est le demi-cercle (euclidien !) de centre O de rayon 1.

Plus généralement l'inversion de centre ω de rapport r est donnée par : $\sigma(z) = \omega + \frac{r^2}{\bar{z}-\omega}$. Si $\omega \in \mathbb{R}$, c'est une symétrie de $\mathbb{H}$ dont l'axe est le demi-cercle de centre Ω de rayon r. Que se passe-t-il si la puissance est négative ?

On peut montrer que l'ensemble des isométries de $\mathbb{H}$ est décrit par les applications f et g introduites au début de ce paragraphe.

§ 7 - LES VECTEURS

Dans ce paragraphe et le suivant on supposera vérifiés les axiomes d'ordre, de congruence **et le postulat d'Euclide**.



On notera que l'unicité de la perpendiculaire à une droite d passant par un point A (2.7) permet de construire la parallèle à δ passant par un point A : on mène d'abord une perpendiculaire quelconque d à la droite δ puis la perpendiculaire δ' à d passant A.

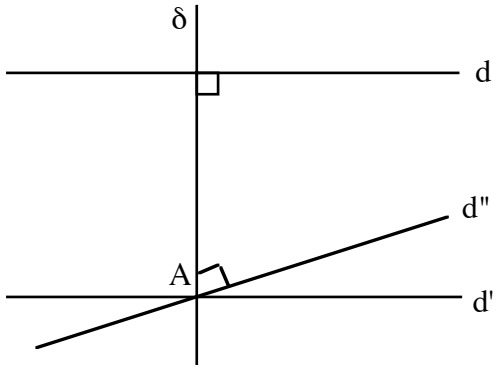
Comme δ et δ' n'ont pas de point commun, elles sont parallèles.

Remarquons que le postulat d'Euclide parmet de montrer facilement que le parallélisme est une relation d'équivalence. Remarquons aussi que les assertions 2, 3, 4, 5 du § 5 sont des conséquences simples du postulat d'Euclide, sans qu'il soit besoin de l'axiome de continuité.

Proposition 7.1

Deux droites sont parallèles si et seulement si toute perpendiculaire à l'une l'est aussi à l'autre.

Démonstration



Si $d // d'$, si $\delta \perp d$, δ est différente de d donc coupe d' en un point A. La perpendiculaire d'' à δ menée par A est parallèle à d donc elle ne peut qu'être égale à d'.

Les translations

Définition

Une translation est le produit de deux symétries d'axes parallèles (éventuellement confondus).

Ainsi, si d et d' sont deux droites et si φ est l'isométrie $\sigma_d\sigma_{d'}$:

soit $d = d'$ et φ est l'identité,

soit $d//d'$ et φ est une translation,

soit $d \cap d' = \{C\}$ et φ est une rotation de centre C.

Ceci montre aussi qu'un déplacement est une translation autre que l'identité si et seulement s'il n'a pas de points fixes.

Proposition 7.2

a) Soient $t = \sigma_d\sigma_{d'}$ une translation et δ une droite parallèle à d.

Il existe δ' telle que $t = \sigma_\delta\sigma_{\delta'}$ et δ'' telle que $t = \sigma_{\delta''}\sigma_\delta$.

b) Le produit de deux demi-tours est une translation.

c) Toute translation peut s'écrire comme produit de deux demi-tours dont l'un des centres peut être choisi quelconque.

d) Le produit d'une translation et d'un demi-tour est un demi-tour.

e) L'image d'une droite p par t est une droite parallèle à p.

Démonstration

a) Par le corollaire 6.13 le produit $\sigma_\delta\sigma_d\sigma_{d'}$ peut s'écrire $\sigma_{\delta'}$.

b) Si 0 et $0'$ sont les centres des demi-tours, on appelle δ la droite $(00')$, d la perpendiculaire à δ passant par 0 et d' la perpendiculaire à δ passant par $0'$. Alors $s_0s_{0'} = (\sigma_d\sigma_\delta)(\sigma_\delta\sigma_{d'}) = \sigma_d\sigma_{d'}$ est une translation.

c) C'est une application de 6.12.

d) Soient s le demi-tour de centre 0 et t une translation. On peut écrire $t = \sigma_d\sigma_{d'}$ où d passe par 0 et $s_0 = \sigma_{d''}\sigma_d$ où d'' passe par 0 et est perpendiculaire à d. Alors $s_0t = \sigma_{d''}\sigma_{d'}$ est un demi-tour.

e) Cette propriété est vraie pour les demi-tours.

Théorème 7.3

L'ensemble $\mathcal{T}(\mathbb{P})$des translations est un sous-groupe commutatif de $I^+(\mathbb{P})$.

Démonstration

1) Si t et t' sont deux translations, on peut les écrire : $t = s_0s_{0'}$ et $t' = s_{0''}s_0$. Alors $t^{-1} = s_{0'}s_0$ et $t't = s_{0''}s_{0'}$ sont des translations.

2) Soient t une translation et s_0 un demi-tour. On peut écrire $t = s_0s_{0'}$. Alors $ts_0 = s_0s_{0'}s_0$ et $s_0t^{-1} = s_0s_{0'}s_0$. Ainsi $ts_0 = s_0t^{-1}$. Soient alors deux translations t et t' et posons $t' = s_As_B$. Alors $tt' = ts_As_B = s_At^{-1}s_B = s_As_Bt = t't$. Ainsi le groupe est commutatif.

Les vecteurs

Si A et B sont deux points de E, il existe une translation t qui applique A sur B : par exemple $t = s_Is_A$ où I est le milieu de $[AB]$. Cette translation est unique : si $B = t(A) = t'(A)$, on peut choisir O et O' tels que $t = s_Os_A$ et $t' = s_{O'}s_A$ et donc $s_O(A) = s_{O'}(A)$ ce qui implique $O = O'$ et donc $t = t'$. Donc l'ensemble des translations agit transitivement et fidèlement sur $\mathbb{P}$.

Définition

Si A et B sont deux points de P, on appelle vecteur $\overrightarrow{AB}$ l'unique translation qui applique A sur B.

Ainsi la relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie qu'il existe une translation t telle que t(A) = B et t(C) = D.

On remarquera que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ les droites (AB) et (CD) sont parallèles. En effet si on a B = t(A), avec $t = \sigma_d\sigma_{d'}$, la droite (AB) est orthogonale à d et de même la droite (CD). Et aussi que (AC) est parallèle à (BD) : c'est une application de 7.2 car (BD) = t((AC)).

Un vecteur peut aussi être défini comme le graphe d'une translation (l'ensemble des couples (A,B) de $\mathbb{P}\times\mathbb{P}$ tels que B = t(A)). On parlera de translation de vecteur $\vec{v}$.

L'ensemble $\vec{\mathbb{P}}$ des vecteurs est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{T}$ des translations. Comme $\mathcal{T}$ est un groupe commutatif, l'ensemble $\vec{\mathbb{P}}$ est muni d'une structure de groupe commutatif par transfert de structure.

Si $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont deux vecteurs, on peut les associer à deux translations t et t' et $\vec{v}+\vec{v}'$ est associée à la translation tt'.

On peut associer t à $\overrightarrow{AB}$ (avec B = t(A) et t' à $\overrightarrow{BC}$ (C = t'(B)). Alors t't : A $\longmapsto$ C ce qui se traduit par : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

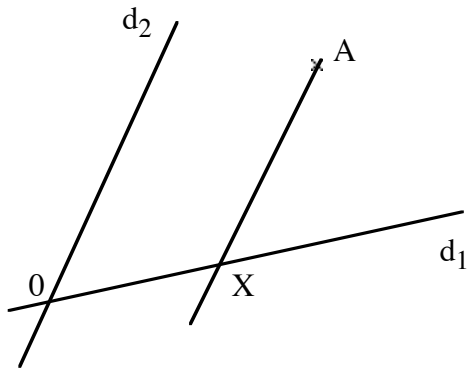
Les coordonnées

Soient d_1 et d_2 deux droites distinctes se coupant en un point O. Soit $\vec{\mathbb{P}}_1$ le sous-groupe de \O(ℙ;\s\UP9(→)) formé par les vecteurs "parallèles" à d_1, c'est-à-dire par les vecteurs de la forme $\overrightarrow{AB}$ où $A,B \in d_1$. De même $\vec{\mathbb{P}}_2$ est le sous-groupe de $\vec{\mathbb{P}}$ formé par les vecteurs parallèles à d_2.

Théorème 7.4

L'application $(\vec{v}_1,\vec{v}_2) \to \vec{v}_1+\vec{v}_2$ de $\vec{\mathbb{P}}_1 x \vec{\mathbb{P}}_2$ dans $\vec{\mathbb{P}}$ est un homomorphisme bijectif.

Démonstration



Comme $\vec{\mathbb{P}}$ est un groupe commutatif cette application est un homomorphisme.

Soit $\vec{w} \in \vec{\mathbb{P}}$ Soit A tel que $\overrightarrow{0A} = \vec{w}$. On se propose d'écrire $\overrightarrow{0A} = \overrightarrow{0X} + \overrightarrow{XA}$ avec $\overrightarrow{0X} \in \vec{\mathbb{P}}_1$ et $\overrightarrow{XA} \in \vec{\mathbb{P}}_2$. Comme $0 \in d_1$, cette relation impose $X \in d_1$. Comme $\overrightarrow{XA} \in \vec{\mathbb{P}}_2$ on doit avoir $(AX) // d_2$.

Donc X est l'intersection de la parallèle à d_2 menée par A avec la droite d_1, ce qui montre l'existence et l'unicité de X.

Si $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1 \in \vec{\mathbb{P}}_1$, $\vec{v}_2 \in \vec{\mathbb{P}}_2$ on dit que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont les coordonnées de $\vec{w}$ selon $(\vec{\mathbb{P}}_1, \vec{\mathbb{P}}_2)$.

Le théorème de Thalès

Soient trois droites d_1, d_2, δ telles que $\delta \nparallel d_1$, $\delta \nparallel d_2$. On définit la projection π de d_1 sur d_2 parallèlement à δ comme suit : à $A \in d_1$, on associe $\pi(A) \in d_2$ qui est l'intersection de d_2 avec la parallèle à δ menée par A.

Théorème 7.5

Soient M, N, P, Q quatre points de d_1 tels que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.

Alors :

1) $\overrightarrow{\pi(M)\pi(N)} = \overrightarrow{\pi(P)\pi(Q)}$

2) *L'application π définit un homomorphisme \O(π;\s\UP8(→)) de \O(P;\s\UP9(→))$_1$ dans $\vec{P}_2$ par $\vec{\pi}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{\pi(M)\pi(N)}$*

Démonstration

1) on a :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{\pi(M)\pi(N)} + \left(\overrightarrow{M\pi(M)} + \overrightarrow{\pi(N)N} \right)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\pi(P)\pi(Q)} + \left(\overrightarrow{P\pi(P)} + \overrightarrow{\pi(Q)Q} \right)$$

Le membre de droite de chacune des égalités est une décomposition de $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ selon \O(ℙ;\s\UP9(→))$_2$ et \O(ℙ;\s\UP9(→))' (\O(ℙ ;\s\UP9(→))' est l'ensemble des vecteurs parallèles à δ). A cause de 7.4 on a donc $\overrightarrow{\pi(M)\pi(N)} = \overrightarrow{\pi(P)\pi(Q)}$ (coordonnée de $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ selon $\vec{P}_2$).

2) Soient $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ deux vecteurs de $\vec{\mathbb{P}}_1$ associés à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$\vec{\pi}(\vec{v}+\vec{v}') = \vec{\pi}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) = \vec{\pi}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{\pi(A)\pi(C)}$$

$$= \overrightarrow{\pi(A)\pi(B)} + \overrightarrow{\pi(B)\pi(C)} = \vec{\pi}(\overrightarrow{AB}) + \vec{\pi}(\overrightarrow{BC})$$

$$= \vec{\pi}(\vec{v}) + \vec{\pi}(\vec{v}').$$

§ 8 - LE CORPS DE LA GEOMETRIE

Les demi-rotations

Soit r une rotation de centre O. L'application r' de P dans P qui à M associe le milieu de l'intervalle [Mr(M)] est la demi-rotation associée à r. (Si M = r(M) on pose r'(M) = M).

Proposition 8.1

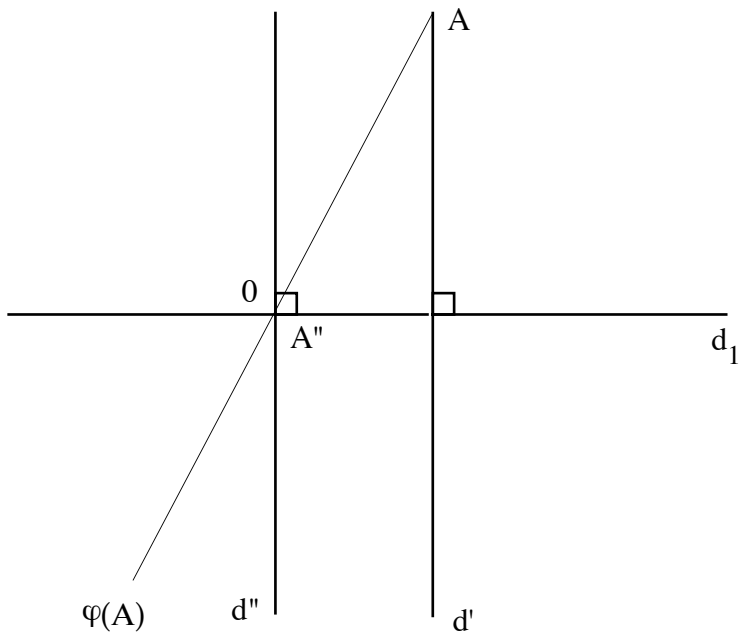
Soient A, B, C trois points distincts deux à deux et alignés. Les points r'(A), r'(B), r'(C) sont soit confondus, soit distincts deux à deux et alignés.

Démonstration

Comme A,B et C sont alignés, r(A), r(B) et R(C) le sont aussi. Soit σ la symétrie par rapport à la droite contenant ces derniers points. On désigne par φ l'anti-déplacement $r^{-1}\sigma$. On décompose φ sous la forme $\varphi = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ telle que $d_1 \perp d_2$ et $d_1 \perp d_3$ (d_i est l'axe de σ_i).

Posons A' = r'(A), B' = r'(B), C' = r'(C) et montrons que ces points sont sur d_1. Soit d' la perpendiculaire à d_1 passant par A. Comme d', d_2, d_3 sont parallèles, il existe d", d" $\perp d_1$, telle que $\sigma''\sigma' = \sigma_2\sigma_3$ et ainsi $\varphi = \sigma_1\sigma''\sigma'$.

Comme $A \in d'$, $\varphi(A) = \sigma_1\sigma''(A)$ et le milieu de [A φ(A)] est le point $O = d_1 \cap d''$.



On a $\varphi(r(A)) = r^{-1}\sigma r(A) = A$. Comme A' est le milieu de $[A\, r(A)]$ et que φ est une isométrie, $A'' = \varphi(A')$ est le milieu de $[\varphi(A)A]$ c'est-à-dire O. Il vient alors : $A' = \varphi^{-1}(A'') = \sigma'\sigma''\sigma_1(A'') = \sigma'(A'')$. Mais $A'' \in d_1$, $d' \perp d_1$ implique que $A' \in d_1$. On a de même $B' \in d_1$, $C' \in d_1$.

Appelons δ la droite contenant A, B et C.

a) Si $\delta \perp d_1$, la droite δ n'est autre que la droite d' ci-dessus qui contient aussi B et C. Donc la droite d' associée à A est par le même processus associée à B et C d'où $0 = A'' = B'' = C''$ c'est-à-dire $A' = B' = C'$.

b) Si δ n'est pas perpendiculaire à d_1, les droites d'' associées respectivement à A, B, C sont distinctes et alors A', B', C' sont distincts deux à deux.

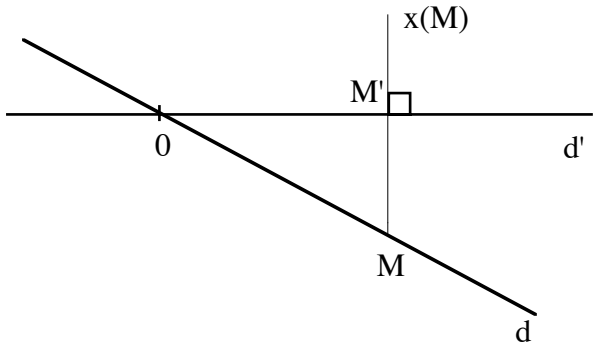
Proposition 8.2

Soit d une droite passant par le centre O d'une rotation r. Alors $r'(d)$ est soit une droite passant par O soit le point O lui-même. Dans le premier cas, r' induit une bijection de d sur $r'(d)$.

Démonstration

Remarquons d'abord que $r'(O) = O$. Soit M un point de d distinct de O et posons $M' = r(M)$.

a) Si $M' = O$, il résulte de la proposition précédente que tous les points de d sont envoyés sur O par l'application r'.



b) Si $M' \neq O$, en appliquant à nouveau 8.1, on voit que $r'(d)$ est une partie de la droite $(OM') = d'$. Comme M' est le milieu de $[M\ r(M)]$ et que $0M \equiv Or(M)$ (car r est une isométrie), la droite d' n'est autre que la médiatrice de $[M\ r(M)]$.

On constate alors facilement que la restriction de r' à d est la projection orthogonale de d sur d' donc c'est une bijection.

Théorème 8.3

Si r est une rotation de centre O, la demi-rotation r' associée est bijective si r n'est pas le demi-tour s_0 et est l'application constante $P \to \{O\}$ si $r' = s_0$.

Démonstration

• Si $r = s_0$ il est clair que $r'(M) = O$ pour tout M.

• Si $r \neq s_0$ supposons qu'il existe M tel que $r'(M) = O$ et $M \neq O$. Alors O est le milieu de $[M\ r(M)]$ donc r et s_0 coïncident en O et M ce qui implique que $r = s_0$. Ainsi, si $r \neq s_0$, $r'(M)$ n'est jamais égal à O si $M \neq O$. La proposition 8.2 nous montre que dans ce cas, si d est une droite passant par O, $r'|_d$ induit une bijection de d sur $d' = r'(d)$. Remarquons aussi qu'alors $r = \sigma_{d'}\sigma_d$ (puisque d' est médiatrice de $[M\ r(M)]$).

On considère maintenant deux droites distinctes d_1 et d_2 passant par O. Leurs images d_1' et d_2' par r' sont distinctes (car $r = \sigma_1'\sigma_1 = \sigma_2'\sigma_2$). On voit alors que r' est injective : si $M \neq N$, $r'(M)$ ne peut être égal à $r'(N)$ ni si O, M, N alignées, ni si $(OM) \neq (ON)$. Et r' est aussi surjective : si d' est une droite passant par O, r peut s'écrire $\sigma_{d'}\,\sigma_d$ pour une droite d passant par O et d' est l'image de d par r'.

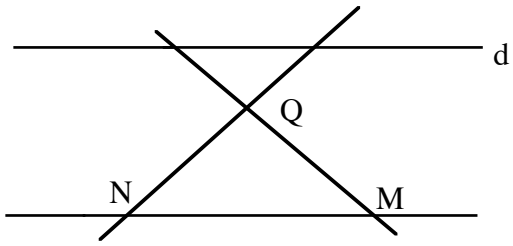
Corollaire 8.4

Si r' est bijective, l'image d'une droite d par r' est une droite d'.

Démonstration

La proposition 8.1 nous montre déjà que l'image d'une droite d est incluse dans une droite d'. Il faut montrer que tout point de d' est l'image d'un point de d ou encore que si $M \notin d$, $r'(M) \notin d'$ (car r' est surjective).

Soit donc un point $M \notin d$ et supposons que $r'(M) \in d'$.



Soit N un point de P.
a) Si $(MN) \cap d = Q$, le point $r'(Q)$ est sur d' de même que $r'(M)$. Donc r' applique la droite (MQ) sur d' donc $r'(N) \in d'$.

b) Si $(MN) // d$, soit Q un point de P n'appartenant pas à (MN) : ainsi la droite (MQ) coupe d donc, comme dans a), on voit que r' applique (MQ) dans d' et on en tire que (NQ) est appliqué sur d'.

On voit donc que tout N est envoyé sur d' par r' ce qui contredit la surjectivité de r'. On a donc montré le résultat.

Les Homothéties

Définition

Une application h de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ est une homothétie de centre O si :

1) *C'est une bijection de $\mathbb{P}$ laissant fixe le point O .*

2) *L'image d'une droite d par h est une droite parallèle à d (au sens large).*

Remarques

1) La composée de deux homothéties de centre O est une homothétie de centre O.

2) L'inverse d'une homothétie de centre O est une homothétie de centre O.

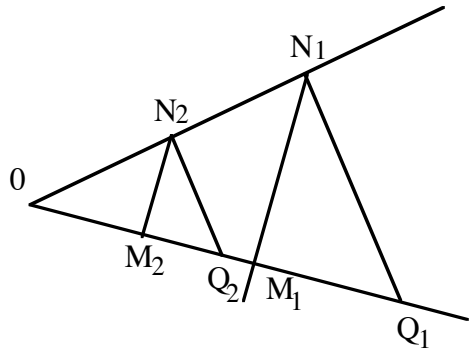
3) Et par suite l'ensemble des homothéties de centre O est un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{P}$.

4) Si A est un point de $\mathbb{P}$, les points O, A, h(A) sont alignés car $(Oh(A)) // (OA)$.

Théorème 8.5

Si O , M_1 et M2 sont trois points alignés tels que $M_1 \neq O$ et $M_2 \neq O$, il existe une homothétie et une seule de centre O qui applique M_1 sur M_2.

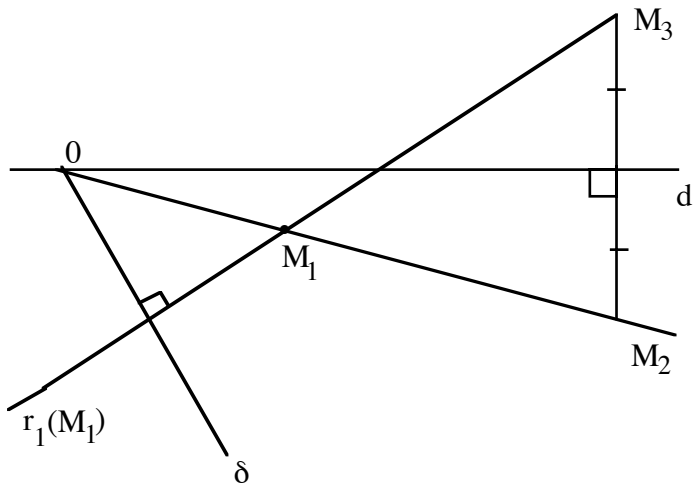
Démonstration



Unicité : Soit h une homothétie de centre O qui applique M_1 sur M_2. Soit N_1 un point de P. Si la droite (ON_1) est distincte de $(0M_1)$, l'image N_2 de N_1 par h se trouve sur (ON_1) et sur la parallèle à (M_1N_1) menée par M_2, elle est donc parfaitement déterminée. Si Q_1 est un point de $(0M_1)$, l'image Q_2 de Q_1 est alors déterminée à partir de l'image de $N_1 \notin (OM_1)$.

Existence

On désigne par d une droite passant par O, non perpendiculaire à (OM_1), par M_3 l'image de M_2 par σ_d, par δ la perpendiculaire à (M_1M_3) passant par O.



Posons : $r_1 = \sigma_\delta \sigma_{(0M_1)}$, $r_3 = \sigma_\delta \sigma_{(0M_3)}$, et soit r la rotation de centre O qui applique M_3 sur M_2 c'est-à-dire $r = \sigma_d\, \sigma_{(0M_3)}$

Montrons que $h = r\, r_3'^{-1}\, r_1'$ est l'homothétie cherchée.

• h(O) = O : c'est évident.

• h est bijective : comme δ n'est perpendiculaire ni à (OM_1) ni à (OM_3), r_1 et r_3 ne sont pas des demi-tours donc r_1', r_3' sont des bijections.

• $h(M_1) = M_2$: $r_1'(M_1)$ est l'intersection de δ avec (M_1M_3) et de même pour $r_3'(M_3)$. Donc $r_1'(M_1) = r_3'(M_3)$ ou encore $r_3'^{-1}\, r_1'(M_1) = M_3$. Par suite $h(M_1) = r(M_3) = M_2$.

• h transforme une droite en une droite puisque c'est vrai pour r, r_1', r_3'. Il reste à voir que si t est une droite, h(t) = t' est parallèle à t.

1) Montrons d'abord que si t est une droite contenant O, h(t) = t. Soit A un point de t différent de O.

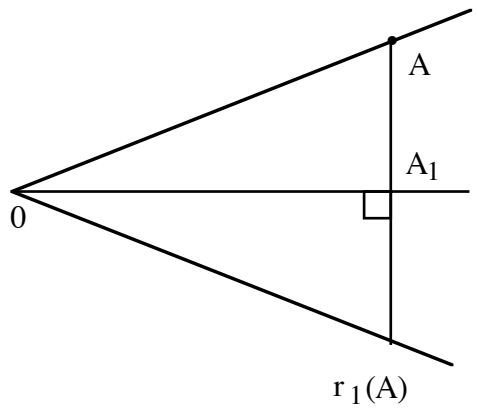
On a : $r_1^{-1}\, r_3 = \sigma_{(0M_2)}\, \sigma_{(0M_3)}$,

$$r^2 = \sigma_d\, \sigma_{(0M_3)}\, \sigma_d\, \sigma_{(0M_3)} = \sigma_{(0M_2)}\, \sigma_{(0M_3)}$$

car d est bissectrice de $\big((OM_2)(OM_3)\big)$.

Ainsi $r^2 = r_1^{-1}\, r_3$.

Soit A_1 le point $r_1^{'}(A)$ et appelons A_3 le point $r_3^{'-1}(A_1)$.



On a donc : $r_1 = \sigma_{(0A_1)}\, \sigma_{(0A)}$

et de même $r_3 = \sigma_{(0A_1)}\, \sigma_{(0A_3)}$ et ainsi

$$r_1^{-1}\, r_3 = \sigma_{(0A)}\, \sigma_{(0A_3)} = r^2.$$

D'où $r^2(A_3) = \sigma_{(0A)}\,(A_3)$.

La droite (OA) est donc la médiatrice de $[A_3\ r^2(A_3)]$ et par suite $r(A_3) \in (0A)$.

Mais $h(A) = r\ \ r_3^{'-1}\, r_1^{'}(A) = r(A3)$.

On a prouvé que $h(A) \in (0A)$ et comme $h(t)$ est une droite, $h(t) = t$.

2) Soit maintenant t quelconque.

Soit t' la parallèle à t passant par O.

On a $h(t) \,//\, h(t')$ (car $h(t \cap t') = h(t) \cap h(t')$) et $h(t') = t$ donc $h(t) \,//\, t$.

On a ainsi prouvé que h était une homothétie.

Le corps des scalaires

Proposition 8.6

Un parallélogramme ABCD est un quadrilatère convexe qui vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes.

1) *Les côtés opposés sont parallèles deux à deux.*

2) *Les côtés opposés sont égaux deux à deux.*

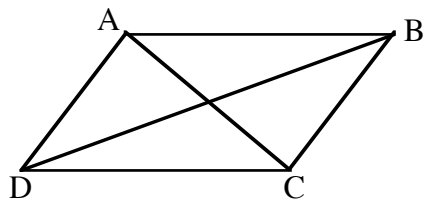
3) *Deux des côtés opposés sont égaux et parallèles.*

4) *Les diagonales se coupent en leur milieu.*

5) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

6) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Démonstration



L'équivalence de ces assertions vient de la présence de triangles égaux (ABD et CBD par exemple), d'angles égaux ($\widehat{ABD}$ et $\widehat{BDC}$ par exemple), de la définition des vecteurs.

Définition

Un scalaire est un homomorphisme α du groupe $\vec{\mathbb{P}}$ dans lui-même tel que pour tout vecteur $\vec{v}$, $\alpha(\vec{v})$ est colinéaire à $\vec{v}$ c'est-à-dire que si $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$ et si $\overrightarrow{OB} = \alpha(\vec{v})$, 0, A, B sont colinéaires.

Les deux résultats suivants nous montrent que les scalaires sont en bijection avec les homothéties de centre donné.

Théorème 8.7

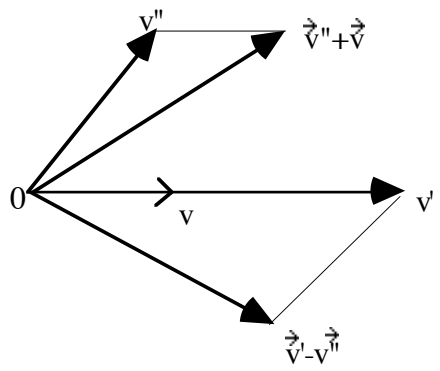
Soit h une homothétie de centre O . A tout vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ on associe le vecteur $\alpha_h(\vec{v}) = \overrightarrow{Oh(A)}$. Alors α_h est un scalaire.

Démonstration

• Il est clair que $\alpha_h(\vec{v})$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. On doit donc montrer que α_h est un homomorphisme de $\vec{\mathbb{P}}$ c'est-à-dire que $\alpha_h(\vec{v}+\vec{v}') = \alpha_h(\vec{v}) + \alpha_h(\vec{v}')$.

• Supposons d'abord que $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ ne sont pas colinéaires et posons $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v}' = \overrightarrow{OB}$. Posons $\overrightarrow{OC} = \vec{v} + \vec{v}'$. Le segment [OC] est une diagonale du parallélogramme OACB. Par définition d'une homothétie, h(O) = O, h(A), h(B), h(C) sont les sommets d'un parallélogramme d'où $\overrightarrow{Oh(A)} + \overrightarrow{Oh(B)} = \overrightarrow{Oh(C)}$ cqfd.

• Supposons que $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont colinéaires. Soit $\vec{v}''$ non colinéaire à $\vec{v}$ (si $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$, on choisit $\vec{v}'' = \overrightarrow{OC}$ tel que C ne soit pas sur la droite (OA)). Alors $\vec{v}'-\vec{v}''$ et $\vec{v}''+\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.



En appliquant ce qui précède :

$\alpha_h(\vec{v}'+\vec{v}) = \alpha_h(\vec{v}'-\vec{v}''+\vec{v}''+\vec{v})$

$= \alpha_h(\vec{v}'-\vec{v}'') + \alpha_h(\vec{v}''+\vec{v})$

$= \alpha_h(\vec{v}')+\alpha_h(-\vec{v}'')+\alpha_h(\vec{v}'')+\alpha_h(\vec{v})$

et on a le résultat cherché à condition d'admettre que $\alpha_h(-\vec{v}'') = -\alpha_h(\vec{v}'')$. Or :

Lemme 8.8

Si A et B admettent M comme milieu, si r' est une demi-rotation et h une homothétie, r'(M) est le milieu de [r'(A)r'(B)] et h(M) est le milieu de [h(A)h(B)].

Démonstration

• Les rotations conservent le milieu.

• Les demi-rotations conservent les droites et le parallélisme donc conservent les parallélogrammes.

• On en tire que les demi-rotations conservent le milieu : le milieu M de l'intervalle [AB] peut être considéré comme le point de rencontre des diagonales d'un parallélogramme ACBD. On voit donc que les homothéties conservent le milieu ce qui montre le lemme et le théorème.

Théorème 8.9

Pour tout scalaire α non nul et tout point O, il existe une homothétie h de centre 0 et une seule telle que $\alpha_h = \alpha$.

Démonstration

Soient $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$ un vecteur non nul et A' tel que $\overrightarrow{OA'} = \alpha(\vec{v})$. Si h est une homothétie de centre O telle que $\alpha_h = \alpha$ on a nécessairement A' = h(A) donc h est l'unique homothétie de centre O qui applique A sur A'. Cette homothétie étant ainsi déterminée, il reste à montrer que si $\vec{w}$ est un vecteur quelconque, $\alpha_h(\vec{w}) = \alpha(\vec{w})$.

• Si $\vec{w}$ n'est pas colinéaire à $\vec{v}$, le vecteur $\alpha(\vec{v}) = \alpha_h(\vec{v})$ se décompose de manière unique en somme d'un vecteur colinéaire à $\vec{w}$ et d'un vecteur colinéaire à $\vec{v}-\vec{w}$. Or on a :

$$\alpha(\vec{v}) = \alpha(\vec{w})+\alpha(\vec{v}-\vec{w})$$

et $$\alpha_h(\vec{v}) = \alpha_h(\vec{w})+\alpha_h(\vec{v}-\vec{w})$$

Cela donne deux décompositions du type prescrit donc $\alpha(\vec{w}) = \alpha_h(\vec{w})$.

• Si $\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{v}$, on applique d'abord ce qui précède à un vecteur $\vec{x}$ non colinéaire à $\vec{v}$ puis à $\vec{w}$ qui n'est pas colinéaire à $\vec{x}$.

Théorème 8.10

L'ensemble K des scalaires est un corps commutatif.

Démonstration

L'ensemble A des homomorphismes du groupe $\vec{\mathbb{P}}$ dans lui-même est muni d'une structure d'anneau par :

$$(\varphi+\psi)(\vec{v}) = \varphi(\vec{v})+\psi(\vec{v}),$$
$$\varphi\psi(\vec{v}) = \varphi(\psi(\vec{v})).$$

$\vec{v} \longmapsto \vec{0}$ est l'élément nul de cet anneau et $Id : \vec{v} \to \vec{v}$ en est l'élément unité.

Il est clair que l'ensemble des scalaires est un sous-anneau unitaire de A. Pour montrer que c'est un corps il faut donc montrer que tout élément non nul de K est inversible. Nous venons de voir que l'ensemble $\mathcal{H}_0$ des homothéties de centre O est en bijection avec $K^* = K-\{0\}$ par l'application $h \longmapsto \alpha_h$. Il est facile de voir que $\alpha_{h'h} = \alpha_{h'}\,\alpha_h$. Donc si α est un scalaire non nul associé à α_h pour $h \in \mathcal{H}_0$, l'inverse de α n'est autre que $\alpha_{h^{-1}}$.

Il nous reste à voir que K est un corps commutatif c'est-à-dire que $\mathcal{H}_0$ est un groupe commutatif. Compte tenu de la définition des homothéties il suffit de montrer que si r_1 et r_2 sont des rotations de centre 0 on a :

1) $r_1r_2 = r_2r_1$,

2) $r_1r_2' = r_2'r_1$,

3) $r_1'r_2' = r_2'r_1'$.

1) A déjà été montré (Théorème 6.12).

2) Le point $r_2'(M)$ est le milieu de $[M\ r_2(M)]$.

Comme r_1 est une isométrie, $r_1r_2'(M)$ est le milieu de $[\ r_1(M)\ \ r_1r_2(M)\ ]$ qui est aussi le milieu de $[\ r_1(M)\ \ r_2r_1(M)\ ]$ et ce dernier point n'est autre que $r_2'r_1(M)$. On a donc prouvé que $r_1r_2' = r_2'r_1$.

3) Soient r_1' et r_2' deux demi-rotations. On sait qu'une demi-rotation conserve le milieu (8.8).

Or $r_2'(M)$ est le milieu de $[M\, r_2(M)]$ donc $r_1'r_2'(M)$ est le milieu de $[r_1'(M)r_1'r_2(M)]$ à cause de ce qui précède. Le dernier point n'est autre que $r_2'r_1'(M)$ d'où le résultat.

La structure d'espace vectoriel

Tout est réuni maintenant pour décrire $\vec{\mathbb{P}}$ comme espace vectoriel sur K, et par suite $\mathbb{P}$ comme espace affine.

Nous savons que $\vec{\mathbb{P}}$ est un groupe commutatif.

Il existe une opération externe de $K\times\vec{\mathbb{P}}$ dans $\vec{\mathbb{P}}$ définie par $(\alpha,\vec{v}) = \alpha(\vec{v})$. Cette opération satisfait aux règles d'un espace vectoriel :

$(\alpha+\beta)(\vec{v}) = \alpha(\vec{v}) + \beta(\vec{v})$, c'est la définition de la somme de deux scalaires.

$\alpha(\vec{v}+\vec{w}) = \alpha(\vec{v})+\alpha(\vec{w})$ car α est un homomorphisme de $\vec{\mathbb{P}}$.

$\alpha(\beta(\vec{v})) = \alpha\beta(\vec{v})$ par définition de la composée de deux applications.

$1(\vec{v}) = \vec{v}$ car l'élément unité de K est l'homomorphisme identité.

Conformément à l'usage nous noterons désormais $\alpha\vec{v}$ au lieu de $\alpha(\vec{v})$.

Si d est une droite, O un point de d, A un point de d autre que O, en désignant par $\vec{v}$ le vecteur $\overrightarrow{OA}$, par $\vec{w}$ un vecteur colinéaire à $\vec{v}$ (c'est-à-dire $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$ avec $B \in d$) il existe un scalaire unique α tel que $\vec{w} = \alpha\,\vec{v}$ (c'est le théorème 8.5).

Si d_1 et d_2 sont deux droites distinctes se rencontrant en un point O, on sait que tout vecteur $\vec{w}$ de $\vec{P}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{v}_1+\vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1$ parallèle à d_1 et $\vec{v}_2$ parallèle à d_2. Si l'on fixe deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ dans les directions $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, on constate que $\vec{w}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2$ et donc :

Théorème 8.11

$\vec{\mathbb{P}}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur K.

Il est possible désormais de développer sur $\vec{\mathbb{P}}$ toute la géométrie vectorielle usuelle.

Quelques remarques pour conclure

Le cadre dans lequel nous évoluons ne nous redonne pas **toute** la théorie des espaces vectoriels de dimension 2 sur un corps. En effet le corps K que nous avons construit a les propriétés suivantes :

5) **K est un corps infini** car il est en bijection avec une droite vectorielle et on sait déjà que les droites sont des ensembles infinis.

6) **K est un corps ordonné** : K étant identifié à une droite d, l'élément neutre de K étant associé à un point O de d, l'élément unité étant associé à A, on appelle K_+ l'ensemble $]OA$ et K_- l'ensemble O/A. Il est clair que si α et β sont dans K_+, il en est de même de $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$. Ainsi la relation $\alpha > \beta$ si et seulement si $\alpha-\beta \in K_+$ est une relation d'ordre sur K compatible avec les opérations de K.

7) **K est de caractéristique nulle** : car un corps ordonné est de caractéristique nulle (si $\alpha > 0$, $\alpha+\alpha+...+\alpha$ est strictement positif).

8) De plus la structure d'espace vectoriel sur $\vec{\mathbb{P}}$ est enrichie par la notion de longueur. On peut remarquer que les longueurs peuvent être associées de manière bijective à l'ensemble des scalaires positifs:

Fixons une fois pour toute une longueur AB qui sera associée au scalaire 1. Sur une demi-droite d d'origine O, soit C le point tel que $OC \equiv AB$. Si M est un point quelconque de d, il existe un scalaire α positif tel que $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OC}$. Ce scalaire α sera associé à la longueur OM. On a une bijection de l'ensemble des longueurs sur l'ensemble des points de d (via la longueur de OM), une bijection de l'ensemble des points de d sur K^+ et par suite une bijection entre K^+ et l'ensemble des longueurs.

Cette bijection nous permet par exemple de reformuler le théorème de Thalès sous la forme bien connue en géométrie élémentaire : si AB et AC sont deux longueurs, on peut les considérer comme des scalaires positifs et ainsi donner un sens au rapport AB/AC.

QUELQUES GÉOMÈTRES

THALÈS	(~ 624, ~ 546)
PYTHAGORE	(environ ~ 569,~ 500)
HIPPOCRATE DE CHIOS	(~ V^{e} s)
EUDOXE	(environ ~ 400, ~ 355)
EUCLIDE	(environ ~ 315, ~ 255)
ARCHIMÈDE	(~ 287, ~ 212)
APOLLONIUS DE PERGE	(~ 262, ~ 180)
MENELAUS D'ALEXANDRIE	(I^{e} s)
PTOLÉMÉE	(environ 90, 168)
PAPPUS D'ALEXANDRIE	(IVe s)
ORESME NICOLE	(1325-1382)
DESARGUES	(1591-1661)
DESCARTES	(1596-1650)
FERMAT	(1601-1665)
PASCAL	(1623-1662)
CEVA	(1648-1734)
SACCHIERI	(1667-1733)
EULER	(1707-1783)
CLAIRAUT	(1713-1765)
MONGE	(1746-1818)
LEGENDRE	(1752-1833)
GAUSS	(1777-1855)
PONCELET	(1788-1867)
LOBATCHEVSKI	(1792-1856)
DANDELIN	(1794-1847)
QUÉTELET	(1796-1874)
BOLYAI	(1802-1860)
CAYLEY	(1821-1895)
RIEMANN	(1826-1866)
BELTRAMI	(1835-1900)
KLEIN	(1849-1925)
POINCARÉ	(1854-1912)
PEANO	(1858-1932)
HILBERT	(1862-1943)
VEBLEN	(1880-1960)
ARTIN	(1898-1962)

SECONDE PARTIE: GÉOMÉTRIE PLANE CLASSIQUE.

I LES ANGLES

§1 - Le groupe des rotations vectorielles du plan

a) Soit $\mathbb{P}$ le plan affine euclidien et B une base orthonormée de $\vec{\mathbb{P}}$. On rappelle qu'une rotation vectorielle est une isométrie de \O($\mathbb{P}$;\s\UP9($\vec{\ }$)) dont la matrice dans la base B est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $a,b \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2 = 1$. Les nombres a et |b| ne dépendent pas de la base orthonormée choisie. L'ensemble des rotations vectorielles est un groupe abélien noté $\mathcal{O}^+(\vec{\mathbb{P}})$.

b) Si B et B' sont deux bases orthonormées de $\vec{\mathbb{P}}$, le passage de B à B' définit soit une rotation, soit une symétrie axiale. Orienter $\vec{\mathbb{P}}$ c'est choisir une base orthonormée B et ne considérer que les **bases orthonormées directes** c'est-à-dire déduites de B par rotations (vectorielles). La matrice d'une rotation vectorielle ne dépend pas de la base orthonormée directe dans laquelle on l'écrit. On sait par ailleurs que l'ensemble des matrices $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $a,b \in \mathbb{R}$ s'identifie, par $M \longmapsto a+ib$, au corps des nombres complexes. Ainsi on a identifications entre le groupe $\mathcal{O}^+(\vec{\mathbb{P}})$, le groupe SO(2) des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2+b^2 = 1$ et le groupe S_1 des nombres complexes de module 1 lui-même identifié à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ par $\alpha \longmapsto e^{i\alpha}$. A toute rotation on peut ainsi associer un élément α de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ qui est **la mesure de l'angle de la rotation**. Cette mesure n'est définie <u>que si</u> le plan est orienté.

§2 Les angles orientés

a) <u>Angle orienté de vecteurs</u>

(i) • **L'angle orienté de deux vecteurs unitaires** : si u et v sont deux vecteurs unitaires, il existe une seule rotation r qui applique u sur v.

C'est **l'angle orienté du couple de vecteurs** (u,v) que l'on appelle souvent **angle orienté des vecteurs** u et v (mais il faut remarquer que l'ordre des vecteurs n'est pas indifférent) et que l'on note $(\widehat{u,v})$ et abusivement (mais souvent) (u,v).

(ii) • **L'angle orienté de deux vecteurs** u et v non nuls est l'angle de $\frac{u}{\|u\|}$ et $\frac{v}{\|v\|}$ au sens ci-dessus. Il est noté (u,v).

On remarquera que si u est un vecteur unitaire et r une rotation, l'angle (u,r(u)) n'est autre que r.

Si u est un vecteur non nul, l'angle (u,-u) est associé à -Id : c'est **l'angle plat** noté $\mathfrak{p}$.

Remarque :

On parle d'angle **orienté** pour exprimer qu'en général $(u,v) \neq (v,u)$. L'espace $\vec{\mathbb{P}}$ n'est pas nécessairement orienté dans ce contexte.

(iii) Bien qu'il y ait identité entre l'ensemble des angles et l'ensemble des rotations, il est d'usage de noter $\mathcal{A}$ (par exemple) l'ensemble des angles et par + l'opération sur le **groupe abélien** $\mathcal{A}$; si r est la rotation qui applique u sur v (u et v sont deux vecteurs unitaires), r^{-1} est la rotation qui applique v sur u : cela se traduit dans $\mathcal{A}$ par $(u,v) = -(v,u)$. On a aussi $2\mathfrak{p} = \mathfrak{p} + \mathfrak{p} = 0$.

De même la composée de la rotation qui applique u sur v avec la rotation qui applique v sur w est la rotation qui applique u sur w : dans $\mathcal{A}$ cela se traduit par $(u,v)+(v,w)) = (u,w)$ (Relation de Chasles).

b) Angle orienté de deux demi-droites

Soient $[AX$ et $[AY$ deux demi-droites d'origine A.

Il existe un unique vecteur unitaire u tel que $[AX = \{M ; \overrightarrow{AM} = \lambda u \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}^+\}$.

On associe de même un vecteur unitaire v à $[AY$ et on définit **l'angle orienté de deux demi-droites** en posant $([AX,[AY) = (u,v)$.

c) Angle orienté de deux droites

(i) Soient D et Δ deux droites, u (resp. v) un vecteur unitaire de D (resp. Δ). On remarquera que $-u$ est aussi un vecteur unitaire de D et qu'il n'y en a pas d'autres. On désire définir l'angle des deux droites à partir de la notion d'angles de vecteurs. On a quatre choix possibles $(\pm u, \pm v)$ mais on peut noter que si r est la rotation qui applique u sur v on a $r(-u) = -v$: donc $(u,v) = (-u,-v)$ et de même $(u,-v) = (-u,v)$. Par contre (u,v) n'est pas égal à $(u,-v)$ (en fait $(u,v) = (u,-v)+\mathfrak{p}$). On est donc conduit à définir **l'angle orienté** de D et Δ , noté (D,Δ), comme étant l'ensemble $\{(u,v) ; (u,-v)\}$.

L'ensemble $\mathcal{A}_d$ des angles de droites est donc en bijection avec $\mathcal{O}^+(\vec{\mathbb{P}}) / \{Id,-Id\}$ ou $\mathcal{A} / \{0,\mathfrak{p}\}$. C'est un groupe abélien dans lequel on a encore la relation de Chasles.

(ii) • Si A,B,C,A',B',C' sont des points du plan, les rotations représentant les angles (AB,AC) et $(A'B',A'C')$ sont du type $\{\rho,\rho\circ s\}$ et $\{\rho',\rho'\circ s\}$ où $s = -Id$. Donc ces angles sont égaux si et seulement si $\rho' = \rho$ ou $\rho' = \rho\circ s$.

• Si r représente $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ et r' représente $(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})$ posons $r' = r\rho$. Si $2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 2(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})$ on a $r^2 = r^2\circ\rho^2$ donc $\rho^2 = Id$ c'est-à-dire $\rho = Id$ ou $\rho = s$. Ainsi :

$$2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 2(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}) \Leftrightarrow (AB,AC) = (A'B',A'C').$$

(iii) Soient D et Δ deux droites perpendiculaires c'est-à-dire dirigées par deux vecteurs unitaires u et v orthogonaux. Si r est la rotation qui applique u sur v la relation $u.v = 0$ implique que $r(v) = \pm u$ et on voit aisément que $r(v) = u$ ne peut convenir (elle implique que r est une symétrie). Écrit en terme de matrice de rotation dans une base orthonormée, l'angle de

deux droites perpendiculaires est donc $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$. On constate que cela ne dépend pas des deux droites perpendiculaires D et Δ et que $(D,\Delta) = (\Delta,D)$ ou encore $2(D,\Delta) = 0$. L'angle de deux droites perpendiculaires est **l'angle droit** noté $\mathfrak{d}$.

d) Effet d'une isométrie vectorielle

On sait qu'une isométrie vectorielle φ du plan (i.e. $\varphi \in \mathcal{O}(\vec{\mathbb{P}})$) est soit une rotation (i.e. $\varphi = \rho \in \mathcal{O}^+(\vec{\mathbb{P}})$) soit une symétrie axiale (i.e. $\varphi = \sigma \in \mathcal{O}^-(\vec{\mathbb{P}})$) .

Soient u et v deux vecteurs unitaires, r la rotation associée à l'angle (u,v), c'est-à-dire que $v = r(u)$.

• Soit ρ une rotation. On sait que $r\rho = \rho r$ donc $(\rho(u),\rho(v)) = (\rho(u),\rho r(u)) = (\rho(u),r\rho(u))$. Donc la rotation associée à $(\rho(u),\rho(v))$ est r c'est-à-dire : $(u,v) = (\rho(u),\rho(v))$.

• Soit σ une symétrie vectorielle axiale (i.e. une réflexion vectorielle). On a : $(\sigma(u),\sigma(v)) = (\sigma(u),\sigma r(u)) = (\sigma(u),\sigma r\sigma(\sigma(u)))$ et on sait que $\sigma r\sigma = r^{-1}$. Ainsi $(\sigma(u),\sigma(v)) = (\sigma(u),r^{-1}(\sigma(u))) = -(v,u)$.

Ainsi les rotations conservent les angles orientés de vecteurs, les symétries axiales changent les angles orientés de vecteurs en leurs opposés.

Tout ceci s'applique sans peine aux angles orientés de demi-droites et de droites.

e) Bissectrice(s)

(i) Soient $[OX$ et $[OY$ deux demi-droites de $\mathbb{P}$. On identifie $\mathbb{P}$ à $\vec{\mathbb{P}}$ en choisissant O comme origine. Soient u et v les vecteurs unitaires tels que $[OX = \mathbb{R}^+u$, $[OY = \mathbb{R}^+v$. La symétrie axiale σ qui échange u et v a pour axe Δ, la droite engendrée par $u+v$. Posons $\Delta' = \mathbb{R}^+(u+v)$ (c'est une des demi-droites portées par Δ). On a :

$\sigma(u) = v$, $\sigma(v) = u$ donc $(u,u+v) = (\sigma(u+v),\sigma(u)) = (u+v,v)$ donc $([OX,\Delta') = (\Delta',[OY)$.

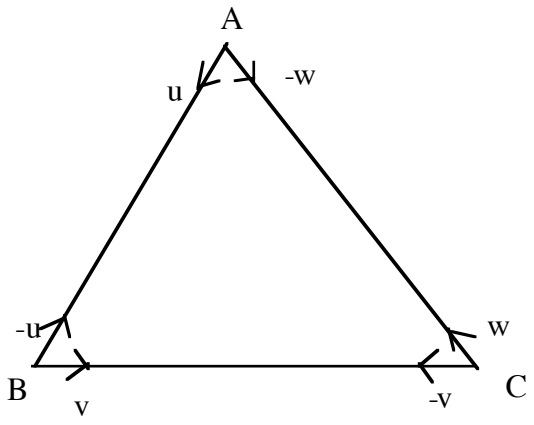
L'angle a été "coupé en deux". On dit que Δ' est la **bissectrice** de l'angle $([OX,[OY)$.

(ii) Ceci peut être repris pour un couple de droites D_1 et D_2 concourantes en O (que l'on choisit comme origine).

On est conduit à considérer un **couple de bissectrices** Δ_1 et Δ_2 : ce sont les deux droites engendrées par $u+v$ et $u-v$ (on reprend les notations de 2-c)). On remarque qu'elles sont perpendiculaires.

§3 Exemples d'applications

a) La somme des angles d'un triangle



Soit ABC un triangle.

(i) On a :

(AB,AC)+(BC,BA)+(CA,CB) = 0

car :

(AB,AC)+(CA,CB) ≡ (AB,CB) ≡ -(BC,BA)

La somme des angles d'un triangle (exprimés comme angles de droites) est nulle.

(ii) Si on regarde les angles d'un triangle comme des angles de vecteurs on a :

(u,-w)+(w,-v)+(v,-u)

= (u,w)+$\mathfrak{p}$+(w,v)+$\mathfrak{p}$+(v,u)+$\mathfrak{p}$ = $\mathfrak{p}$.

b) Angles à côtés perpendiculaires

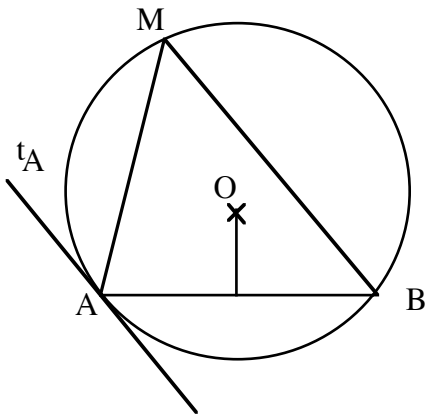
Soient D_1,D_2,D'_1,D'_2 quatre droites telles que $D_1 \perp D'_1$, et $D_2 \perp D'_2$. On a : $(D_1,D_2) = (D'_1,D'_2)$.

En effet : $(D_1,D_2) = (D_1,D'_1)+(D'_1,D'_2)+(D'_2,D_2) = (D'_1,D'_2)+2\mathfrak{d} = (D'_1,D'_2)$.

c) Points cocycliques

On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre 0 de rayon R, deux points A et B de $\mathscr{C}$, la tangente t_A en A à $\mathscr{C}$ et la médiatrice $\Delta(AB)$ du segment [AB] .

(i) Pour tout point M de $\mathscr{C}$ on a : $2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.



• Soit M un point du cercle.

En appliquant le résultat a) ci-dessus dans les triangles isocèles OAM et OMB on voit que :

$2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}) = \mathfrak{p}+(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ et

$2(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}) = \mathfrak{p}+ (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB})$.

La somme de ces relations donne le résultat cherché.

(ii) Pour tout point M de $\mathscr{C}$ on a **:** $(MA,MB) = (OA,\Delta(AB)) = (t_A,AB)$.

• **1ère égalité :** l'application de a) ci-dessus aux triangles OIA et OIB (où I est le milieu de AB) montre que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI}) = (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})$ et donc que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI})$.

En appliquant le résultat (i) et le résultat 2,c,(ii) on voit que $(MA,MB) = (OA,\Delta(AB))$.

2ème égalité : il s'agit de l'égalité de deux angles à côtés perpendiculaires.

(iii) Une condition nécessaire et suffisante pour que quatre points non alignés A,B,C,D soient cocycliques est (AC,AD) = (BC,BD).

Si on désigne par T la droite passant par C telle que (AC,AD) = (T,CD) on constate par (ii) ci-dessus que A,B,C et D sont sur le cercle passant par C et D et ayant T pour tangente en C. La condition est donc suffisante et on voit qu'elle est nécessaire en appliquant à nouveau (ii).

Remarque : On a la même conclusion si l'on prend comme hypothèse $2(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = 2(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$.

(iv) On tire facilement de ce qui précède que si $\alpha \neq 0$ est un angle de droites et A et B deux points, l'ensemble des points M tels que $(MA,MB) = \alpha$ est un cercle passant par A et B (privé de A et B).

De même si α est un angle de vecteurs et A et B deux points, l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \alpha$ est un arc de cercle d'extrémités (non comprises) A et B (théorème de l'**arc capable**).

§4 La mesure des angles (On suppose le plan orienté).

a) Si u et v sont deux vecteurs non nuls, la **mesure de l'angle** (u,v) est la mesure de l'angle de la rotation qui définit l'angle des vecteurs. C'est donc un réel modulo 2π que l'on note également (u,v). Ainsi $\mathfrak{p}$ a pour mesure π (mod 2π).

b) On définit de manière analogue la mesure de l'angle de deux demi-droites.

c) Si l'angle de deux droites D et Δ est l'ensemble $\{(u,v),(u,-v)\}$ désignons par α la mesure de (u,v). Alors $(u,-v) = (u,v)+(v,-v)$ a pour mesure $\alpha+\pi$. Ainsi on peut associer à tout couple de droites un nombre réel modulo π qui est **la mesure de l'angle** (D,Δ). Si deux droites sont perpendiculaires, leur angle a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ (mod π).

§5 Angles non orientés

a) Secteur angulaire. Si A,B,C sont trois points non alignés, le **secteur angulaire saillant** $B\hat{A}C$ est l'intersection du demi-plan (fermé) défini par la droite (AB) contenant C et du demi-plan défini par (AC) contenant B. C'est la partie du plan comprise entre les demi-droites [AB et [AC. Le complémentaire de ce secteur est le **secteur angulaire rentrant** (noté parfois $B\breve{A}C$) qui est réunion de deux demi-plans.

b) Si u et v sont deux vecteurs qui engendrent les demi-droites [AB et [AC, la **mesure du secteur saillant** $B\hat{A}C$ est Arc cos $\frac{u.v}{\|u\|.\|v\|}$. C'est donc un nombre de $[0,\pi]$ qui est la valeur absolue du représentant dans $[-\pi,+\pi]$ de la mesure de l'angle (u,v).

S'il s'agit de deux droites, en reprenant les notations de 2-c, on définit **l'écart angulaire** de D et Δ par Arc cos $\frac{|u.v|}{\|u\|\|v\|}$. C'est donc un nombre de $[0,\frac{\pi}{2}]$.

§6 - Autres points de vue

a) Une équivalence sur les couples de vecteurs

Deux couples de vecteurs unitaires (u,v) et (u',v') sont dits équivalents si la rotation r qui applique u sur u' applique aussi v sur v'. C'est évidemment une relation d'équivalence et un **angle de vecteurs** est une classe d'équivalence pour cette relation. Cela correspond assez clairement à la définition donnée dans 2-a).Voir aussi 2-d).

b) Ordre sur les demi-droites

Soit ψ une forme bilinéaire alternée sur $\vec{\mathbb{P}}$ (c'est par exemple le déterminant associé à une base fixée). Pour toute demi-droite vectorielle Δ_i soit u_i le vecteur unitaire qui l'engendre ; on pose $\psi(\Delta_1,\Delta_2) = \psi(u_1,u_2)$.

Si Δ_1 et Δ_2 sont deux demi-droites de $\vec{\mathbb{P}}$, on appelle **secteur angulaire** (Δ_1,Δ_2) l'ensemble des demi-droites Δ telles que deux au moins des trois nombres $\psi(\Delta_1,\Delta)$, $\psi(\Delta,\Delta_2)$, $\psi(\Delta_2,\Delta_1)$ sont strictement positifs. Si $\psi(\Delta_1,\Delta_2)$ est positif ce secteur angulaire est **saillant** ; il est **rentrant** dans le cas contraire. Dans le premier cas on a l'intersection de deux demi-plans et leur réunion dans le second cas. On retrouve la situation de 5-a).

§7- Angles dans l'espace

a) On peut orienter l'espace E euclidien de dimension trois en choisissant une base orthonormée (que l'on prend par exemple orientée par la règle du "bonhomme d'Ampère"). Il faut noter que cela ne suffit pas pour orienter chaque plan vectoriel : un tel plan ne peut être orienté que si on choisit en plus un vecteur unitaire sur sa droite orthogonale.

b) Cela étant rappelé, l'angle de deux vecteurs, de deux demi-droites, de deux droites est défini en considérant le plan que ces deux objets engendrent (s'ils sont linéairement indépendants sinon l'angle est nul), et en reprenant dans ce plan les définitions du § 5 .

c) On a aussi la notion **d'angle de deux plans** : soient P_1 et P_2 deux plans vectoriels se coupant le long d'une droite Δ. Soit P le plan orthogonal à Δ et $D_1 = P \cap P_1$, $D_2 = P_1 \cap P_2$. L'angle de P_1 et P_2 est l'angle de D_1 et D_2 (que l'on peut orienter en choisissant un sens sur Δ).

d) On peut, si on le souhaite, définir l'angle d'une droite Δ et d'un plan P comme étant l'angle de Δ et de sa projection orthogonale sur P.

II TRANSFORMATIONS DU PLAN

§0 Applications affines

1) Soit E un espace affine (réel) d'espace vectoriel associé $\vec{E}$. On peut retrouver $\vec{E}$ à partir de E :

<u>Définition 1</u>: Sur l'ensemble $\mathcal{E}$ des couples (ordonnés) de points (on dit plutôt des "bipoints"), on définit une relation binaire appelée **équipollence**, par:

(A,B) ~ (C,D) si et seulement si ABDC est un parallélogramme (généralisé)

c'est à dire si et seulement si les segments [AD] et [BC] ont même milieu.

Cette relation est évidemment réflexive et symétrique, on montre qu'elle est transitive; autrement dit que c'est une relation d'équivalence. L'ensemble quotient $\mathcal{E}/\sim$ s'identifie naturellement à $\vec{E}$. On note $\overrightarrow{AB}$ la classe du bipoint (A,B) et on a la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

2) Une **application affine** de E dans E (ou transformation affine de E) est une application f de E dans E , telle qu'il existe une application linéaire $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{E}$ avec la propriété:

pour tout couple (M,N) de points on a : $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \vec{f}(\overrightarrow{MN})$

L'application $\vec{f}$ est uniquement déterminée par cette condition, on l'appelle **l'application linéaire associée à** f .

<u>Proposition</u> : Une application $f : E \to E$ est affine si et seulement si elle conserve le barycentre, c'est à dire si et seulement si le barycentre des $(f(A_i),\alpha_i)$ est l'image par f du barycentre des (A_i,α_i) pour tout choix des points pondérés $(A_i,\alpha_i)_{i\in I}$ (avec $\sum_{i\in I} \alpha_i \neq 0$).

3) <u>Propriétés des applications affines bijectives</u>:

Soit $f : E \to E$ une application affine bijective, alors:

a) f transforme une droite en une droite

b) l'image par f du milieu de [MN] est le milieu de [f(M)f(N)]

c) f transforme 2 droites parallèles en 2 droites parallèles.

En fait, si $\dim(E) \geq 2$, une application bijective $f : E \to E$ qui vérifie a) et b) est affine. Cela résulte de la définition de l'équipollence (1) ci-dessus) mais aussi du fait que tout automorphisme de corps de $\mathbb{R}$ est l'identité. Les raisonnements sont essentiellement ceux du §8 de la première partie (géométrie plane axiomatique).

4) <u>exemples</u> : Outre les transformations que l'on va voir dans les paragraphes 1 , 2 et 3 , les applications affines les plus courantes sont les projections et les affinités:

Soient F un sous-espace affine de E et $\vec{V}$ un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$ tels que $\vec{E}$ soit somme directe de $\vec{F}$ et $\vec{V}$.

La **projection** π **de** E **sur** F **parallèlement à** $\vec{V}$ envoie un point M sur l'unique point $\pi(M)$ de F tel que $\overrightarrow{M\pi(M)} \in \vec{V}$.

L'**affinité de base** F , **de direction** $\vec{V}$ **et de rapport** $r \neq 0$, envoie un point M sur l'unique point $\alpha(M)$ tel que $\pi(M)\overrightarrow{\alpha(M)} = r.\ \pi(\overrightarrow{M})M$.

Si E est un espace euclidien et si $\vec{V}$ est l'orthogonal de $\vec{F}$, on dit que la projection π ou l'affinité α est **orthogonale** (et on ne précise pas $\vec{V}$).

§1 Homothéties et translations.

On se place dans le plan euclidien $\mathbb{P}$.

1) Le groupe des dilatations:

Définition: Une application f de $\mathbb{P}$ dans lui même est appelée une **dilatation** si elle possède la propriété suivante: Il existe un scalaire $\lambda \neq 0$ (le **rapport** de la dilatation) tel que, quels que soient A et B, on a : $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \lambda\ \overrightarrow{AB}$.

Exemples: Les homothéties (λ est le rapport d'homothétie); les translations ($\lambda = 1$).

Théorème fondamental: Toute dilatation f est une homothétie (si $\lambda \neq 1$ et alors son centre est l'unique point fixe de f) ou une translation (si $\lambda = 1$, et alors f n'a pas de point fixe sauf si f est l'identité).

Démonstration: Supposons d'abord $\lambda \neq 1$. Soient A un point et f(A) son image, soit Ω le point tel que $\lambda\ \overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{\Omega f(A)}$ ($\lambda \neq 1$, donc il existe et est unique d'après la théorie du barycentre). Puisque nous avons aussi $\lambda\ \overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{f(\Omega)f(A)}$, c'est que $\Omega = f(\Omega)$. Mais alors nous aurons pour tout M, $\overrightarrow{\Omega f(M)} = \lambda\ \overrightarrow{\Omega M}$, ce qui signifie que f est l'homothétie de centre Ω et de rapport λ.

Supposons maintenant $\lambda = 1$, choisissons un point A et posons $\overrightarrow{Af(A)} = \vec{V}$. Pour tout point M nous avons $\overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{AM}$, ce qui implique $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Af(A)} = \vec{V}$. Et par conséquent f est la translation de vecteur $\vec{V}$.

Conséquence: Les dilatations sont toutes des applications inversibles. L'ensemble $\mathcal{D}$ des dilatations est un sous-ensemble du groupe des bijections de $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{P}$; ce sous-ensemble est stable par composition (car il est clair sur la définition que la composée de deux dilatations est une dilatation), il contient l'identité, et contient l'inverse de ses éléments (car l'inverse d'une homothétie est une homothétie, et l'inverse d'une translation est une translation), donc c'est un sous-groupe.

Remarque: Dire que pour tout couple (A,B) on a $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \lambda\ \overrightarrow{AB}$, c'est dire que f est affine et que son application linéaire associée est la multiplication par λ. Le groupe $\mathcal{D}$ est donc un groupe de transformations affines. On notera qu'à chaque élément de $\mathcal{D}$ est associé son rapport λ, qui caractérise l'application linéaire associée; ceci nous donne une application ρ: $\mathcal{D} \to \mathbb{R}^*$ qui est un homomorphisme de groupes. Il est surjectif, son noyau est le groupe des translations.

Théorème fondamental amélioré - On considère une application f de $\mathbb{P}$ dans lui même telle que: quels que soient les points A et B distincts du plan $\mathbb{P}$, f(A) et f(B) sont distincts (ce qui signifie que f est injective) et la droite (f(A)f(B)) est parallèle à la droite (AB). Alors f est une dilatation.

(Voir exercice 15.2.)

2) Caractérisation par l'image de deux points.

Propriété: Soient $A \neq B$ et $A' \neq B'$; on suppose que les droites (AB) et (A'B') sont parallèles. Alors il existe une unique dilatation qui envoie A sur A' et B sur B'. En particulier une dilatation est définie par deux points et leurs images.

Démonstration de l'existence: Il existe une translation h qui envoie A sur A'; elle envoie B en un point B_1 situé sur la droite (A'B'). Il existe alors une homothétie h de centre A' qui envoie B_1 sur B'. La dilatation $h \circ t$ envoie A sur A' et B sur B'.

Démonstration de l'unicité: Si on a deux solutions h_1 et h_2 du problème, alors $h_1^{-1} \circ h_2$ est une dilatation qui envoie A sur lui même et B sur lui même. Donc c'est l'identité. Et $h_1 = h_2$.

Conséquence: Soient ABC et A'B'C' deux (vrais) triangles à côtés parallèles. Il existe une unique dilatation qui envoie A sur A', B sur B' et C sur C'.

Démonstration: Soit h l'unique dilatation qui envoie A sur A' et B sur B'. Il s'agit de montrer qu'elle envoie C sur C'. Elle envoie C sur un point de la parallèle à (AC) passant par A', c'est à dire sur un point de la droite (A'C'). Elle envoie C sur un point de la parallèle à (BC) passant par B', c'est à dire sur un point de la droite (B'C'). Elle envoie donc C sur l'intersection C' des droites (A'C') et (B'C').

3) Étude cas par cas de la loi de composition.

On ne revient pas sur la composée de deux translations.

Composée de deux homothéties dont le produit des rapports est 1: La composée $g = h(O,\lambda) \circ h(\Omega,1/\lambda)$ est une dilatation de rapport 1, c'est à dire une translation (ou l'identité). Elle est définie par son vecteur, qui est $\overrightarrow{\Omega g(\Omega)} = \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{O g(\Omega)} = \overrightarrow{\Omega O} + \lambda \overrightarrow{O\Omega}$
$= (\lambda - 1) \overrightarrow{O\Omega}$. On notera que, si $O \neq \Omega$, ce vecteur est parallèle à la droite $(O\Omega)$.

Composée de deux homothéties dont le produit des rapports n'est pas 1:
$g = h(O,\lambda) \circ h(\Omega,\mu)$ est une dilatation de rapport $\lambda\mu \neq 1$, c'est à dire une homothétie de rapport $\lambda\mu$. Nous allons préciser son centre A. Notons B son image par la première homothétie, nous avons $\lambda \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{\Omega B} = \mu \overrightarrow{\Omega A}$. D'où $(1-\lambda\mu) \overrightarrow{\Omega A} = (\lambda - 1) \overrightarrow{O\Omega}$. On notera que les trois centres sont alignés.

Composée d'une translation et d'une homothétie: $g = h(O,\lambda) \circ t_{\vec{V}}$ et $g' = t_{\vec{V}} \circ h(O,\lambda)$ sont des dilatations de rapport λ, c'est à dire (puisque $\lambda \neq 1$) des homothéties de rapport λ. Il reste à préciser leurs centres. On peut les déduire d'un calcul analogue aux précédents. On peut aussi remarquer que les relations $g = h \circ t$ et $g' = t \circ h$ s'écrivent aussi $t = h^{-1} \circ g = g' \circ h^{-1}$. Et, par application du premier cas étudié, le vecteur de t est parallèle à la droite qui joint les centres de h et de g (ou de g' et de h) .

4) Propriétés communes aux homothéties et aux translations

La définition que nous avons donnée des dilatations signifie que ce sont les applications affines dont l'application linéaire associée est de la forme $\vec{V} \longmapsto \lambda \vec{V}$ ($\lambda \neq 0$).

En particulier une dilatation transforme barycentre en barycentre.

Une dilatation transforme toute droite en une droite parallèle .

Une dilatation h de rapport λ multiplie les distances par $|\lambda|$. Elle transforme le cercle $\mathscr{C}(\Omega,\rho)$ en le cercle $\mathscr{C}(h(\Omega),\rho|\lambda|)$.

Les dilatations conservent les angles (orientés de vecteurs), en effet l'application vectorielle associée commute avec toutes les isométries vectorielles.

§2 Isométries

On se place toujours dans le plan euclidien (orienté ou non) $\mathbb{P}$.

1) Réflexions.

Définition : La **réflexion** (ou symétrie axiale) **d'axe** Δ (droite de $\mathbb{P}$) est l'application σ_Δ de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ qui transforme un point M en le point M' tel que le milieu H de [MM'] soit sur Δ et que $\overrightarrow{MM'}$ soit orthogonal à Δ (alors H est le projeté orthogonal de M sur Δ).

Il est alors clair que $\sigma_\Delta \circ \sigma_\Delta = \mathrm{Id}$: σ_Δ est bijective d'inverse σ_Δ .

Propriétés classiques:

Conservation des distances (l'image d'un cercle est un cercle).

Conservation des alignements (l'image d'une droite est une droite).

Les réflexions conservent le milieu donc conservent l'équipollence des bipoints. Ainsi elles ont des applications linéaires associées et conservent le barycentre.

L'application linéaire associée à une réflexion est une réflexion vectorielle. Or on sait qu'une réflexion vectorielle conserve le produit scalaire et renverse les angles orientés (de vecteurs). Donc:

Par une réflexion les angles de secteurs sont conservés; les angles orientés de vecteurs sont inversés et le produit scalaire est conservé.

2) Isométries : On appelle **isométrie** du plan $\mathbb{P}$ toute application f de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$, telle que, quels que soient les points M et N, la distance de f(M) à f(N) est égale à la distance de M à N.

La composée de deux isométries est évidemment une isométrie.

L'identité est une isométrie, une réflexion est une isométrie.

Théorème 1: Toute isométrie qui laisse fixes trois points A,B,C non alignés est l'identité.

En effet s'il existait un point M tel que $f(M) \neq M$, les points A,B,C seraient sur la médiatrice de [Mf(M)] ; ce qui est impossible puisqu'ils ne sont pas alignés.

Théorème 2: Étant donnés trois points A,B,C non alignés et trois points A',B',C' tels que AB = A'B', BC = B'C ' et CA = C 'A', il existe une isométrie de $\mathbb{P}$ et une seule qui envoie A sur A', B sur B' et C sur C '. Cette isométrie peut s'écrire comme un produit d'au plus 3 réflexions.

Une première isométrie f_1, qui est soit la réflexion par rapport à la médiatrice de [AA'] (si $A \neq A'$), soit l'identité (si A=A'), transforme A en A' , et envoie B et C sur des points B_1 et C_1. On a $A'B_1 = AB = A'B'$. Une deuxième isométrie f_2, qui est soit la réflexion par rapport à la médiatrice de $[B_1B']$ (si $B_1 \neq B'$), soit l'identité (si $B_1=B'$) transforme A' en lui même et B_1 en B'; elle envoie C_1 sur un point C_2.Nous avons alors $A'C' = A'C_2$ et $B'C' = B'C_2$. Il en résulte que:

Ou bien $C_2 = C'$, et alors $f = f_2f_1$ est l'isométrie cherchée

Ou bien C_2 et C' sont symétriques par rapport à (A'B'); l'isométrie cherchée est alors la composée de f_2f_1 et de la réflexion par rapport à (A'B') .

Il nous reste à montrer que l'isométrie f ainsi construite est la seule possible. Remarquons que f est inversible, puisque c'est un produit de réflexions. Si g est une isométrie qui envoie A,B,C sur A',B',C', considérons $f^{-1}g$. C'est une isométrie qui laisse fixes les points A,B,C; et puisque ceux-ci ne sont pas alignés, c'est l'identité. Donc f = g.

<u>Théorème 3</u> : Toute isométrie du plan est un produit d'au plus trois réflexions.

Soit en effet g une isométrie, choisissons trois points A,B,C non alignés. Alors g est la seule isométrie qui envoie A sur g(A), B sur g(B) et C sur g(C); et nous avons (cf. Th. 2) appris à construire cette isométrie comme un produit d'au plus trois réflexions.

<u>Théorème 4</u>: Toute isométrie est inversible. Donc l'ensemble $\mathcal{O}(\mathbb{P})$ des isométries est un sous-groupe du groupe des bijections du plan P.

En effet: Tout produit de réflexions est inversible (car $(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n)^{-1} = \sigma_n\ldots\sigma_2\sigma_1$), donc toute isométrie est inversible. Donc l'ensemble $\mathcal{O}(\mathbb{P})$ des isométries du plan $\mathbb{P}$, est un sous-ensemble du groupe des bijections de $\mathbb{P}$; ce sous-ensemble est stable par composition et par passage à l'inverse, et il contient l'identité; c'est donc un sous-groupe.

<u>Théorème 5</u>: Toute isométrie est une application affine. Elle conserve le barycentre, elle transforme droite en droite, segment en segment et cercle en cercle.

L'application $f \longmapsto \vec{f}$ est un homomorphisme de $\mathcal{O}(\mathbb{P})$ dans le groupe $\mathcal{O}(\vec{\mathbb{P}})$ des isométries de $\vec{\mathbb{P}}$. Son noyau est le groupe des translations. Il est en fait surjectif (cf. n°6).

3) <u>Isométries et angles</u>: Nous avons vu que, si les triplets ABC et A'B'C' sont symétriques par rapport à une droite Δ, alors $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})$.

Soient f une isométrie, et A, B, C trois points. Comparons les angles $(\overrightarrow{f(A)f(B)},\overrightarrow{f(A)f(C)})$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. Si f peut être écrite comme un produit d'un nombre pair de réflexions, ils sont égaux; si f peut être écrite comme le produit d'un nombre impair de réflexions, ils sont opposés. Donc:

* Ou bien f conserve les angles de vecteurs, et alors toute décomposition de f en un produit de réflexions comporte un nombre pair d'éléments.

* Ou bien f inverse les angles de vecteurs, et alors toute décomposition de f en produit de réflexions comporte un nombre impair d'éléments.

Dans le premier cas on dit que f est un **déplacement**; dans le second cas on dit que f est un **antidéplacement**.

L'ensemble $\mathcal{O}^+(\mathbb{P})$ des déplacements est un sous-groupe de $\mathcal{O}(\mathbb{P})$. On note $\mathcal{O}^-(\mathbb{P})$ l'ensemble des antidéplacements $\mathbb{P}$.

4) Les différents types de déplacements

Un déplacement (différent de l'identité) est le produit de deux réflexions. Notons Δ et Δ' leurs axes; deux cas sont possibles suivant que Δ et Δ' sont parallèles ou sécantes.

Composées de réflexions d'axes parallèles.

Nous choisissons un repère orthonormé tel que les axes soient parallèles à Oy. Les formules de la réflexion par rapport à $\Delta(x = a)$ sont: $(x,y) \to (2a-x,y)$. Donc si nous composons $\sigma_\Delta \circ \sigma_{\Delta'}$, où $\Delta(x = a)$ et $\Delta'(x = a')$, nous obtenons l'application :

$$(x,y) \longmapsto (2a-(2a'-x),y) = (2(a-a')+x,y)$$

C'est la translation de vecteur $(2(a-a'),0)$.

Remarquons que si nous composons $\sigma_\Delta \circ \sigma_{\Delta'} \circ \sigma_{\Delta''}$, où $\Delta''(x = a'')$, nous obtenons l'application: $(x,y) \longmapsto (2(a''-a'+a)-x,y)$

C'est la réflexion par rapport à la droite d'équation $x = a''-a'+a$.

Composées de réflexions d'axes passant par O.

Nous ferons un calcul en coordonnées polaires. La réflexion par rapport à la droite d'angle polaire α (mod π), a pour formules: $(\rho,\theta) \longmapsto (\rho,2\alpha-\theta)$. Donc la composée de σ_Δ (où Δ a pour angle polaire α (mod π)) et de $\sigma_{\Delta'}$ (où Δ' a pour angle polaire α' (mod π)) est définie par:

$$\sigma_{\Delta'} \circ \sigma_\Delta : (\rho,\theta) \to (\rho,2(\alpha'-\alpha)+\theta)$$

C'est la **rotation de centre** O **et d'angle** $\theta = 2(\alpha'-\alpha)$; en effet c'est l'application de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ qui transforme O en O et $M \neq O$ en M' tel que $OM' = OM$ et $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) = \theta$.

Si Δ'' a pour angle polaire α'' (mod π), $\sigma_{\Delta''} \circ \sigma_{\Delta'} \circ \sigma_\Delta$ est l'application: $(\rho,\theta) \to (\rho,2(\alpha''-\alpha'+\alpha)-\theta)$. C'est la réflexion par rapport à la droite d'angle polaire $\alpha''-\alpha'+\alpha$ (mod π).

On peut formuler les résultats principaux obtenus comme suit:

Théorème 1: Soient Δ et Δ' deux droites passant par O, soient $\overrightarrow{\Delta}$ et $\overrightarrow{\Delta'}$ des vecteurs portés par ces droites (et non nuls), alors $\sigma_{\Delta'} \circ \sigma_\Delta$ est la rotation de centre O et d'angle $2(\overrightarrow{\Delta},\overrightarrow{\Delta'})$.

Corollaire: Toute rotation de centre O est la composée de deux réflexions dont les axes passent par O. De plus on peut choisir l'une de ces deux réflexions (pourvu que l'axe passe par O).

Théorème 2: Soient Δ et Δ' deux droites parallèles, et soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$ perpendiculaire à Δ et Δ', telle que $t(\Delta) = \Delta'$. Alors $\sigma_{\Delta'} \circ \sigma_\Delta$ est la translation $t \circ t$ de vecteur $2\overrightarrow{V}$.

Corollaire: Une translation de vecteur $\overrightarrow{V}$ est la composée de deux réflexions dont les axes sont perpendiculaires à $\overrightarrow{V}$. De plus on peut choisir l'une de ces deux réflexions (pourvu que l'axe soit perpendiculaire à $\overrightarrow{V}$).

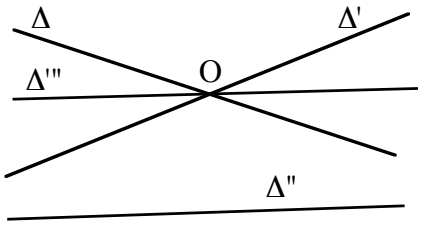
Théorème 3 : Tout déplacement est une rotation ou une translation.

Remarque: L'application $f \longmapsto \vec{f}$ est un homomorphisme de $\mathcal{O}^+(\mathbb{P})$ dans le groupe $\mathcal{O}^+(\overrightarrow{\mathbb{P}})$ des isométries directes de $\overrightarrow{\mathbb{P}}$ (qui est formé uniquement de rotations). Il est en fait surjectif (cf.

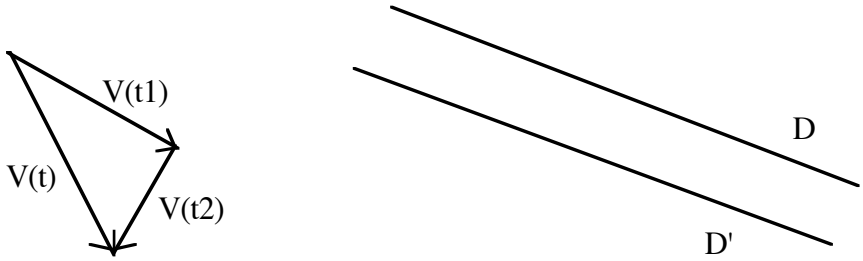
n°6). Mais, comme on a vu, l'angle de f est en fait $\vec{f}$. Ainsi l'angle du produit de 2 rotations est la somme des angles (une translation a un angle nul).

5) <u>Les différents types d'antidéplacements</u>

Un antidéplacement est soit une réflexion, soit un produit de 3 réflexions. Il nous reste donc à étudier les produits de 3 réflexions. Si les 3 axes sont parallèles ou sécants en O, le produit est une réflexion (on l'a vu ci-dessus). Étudions donc $f = \sigma''\circ\sigma'\circ\sigma$ dans le cas où les 3 axes Δ'',Δ',Δ ne sont ni parallèles ni sécants en un point O.



Supposons que Δ et Δ' se coupent en O. Notons Δ''' la parallèle à Δ'' passant par O. Alors $f = (\sigma''\circ\sigma''')\circ(\sigma'''\circ\sigma'\circ\sigma) = t\circ s$ (car on a vu ci-dessus que $\sigma''\circ\sigma'''$ est une translation t, et que $\sigma'''\circ\sigma'\circ\sigma$ est une réflexion s). Écrivons $t = t_1\circ t_2$, où t_1 est une translation parallèle à l'axe D de s, et t_2 une translation perpendiculaire à D. Alors $t_2 = s_1\circ s_2$ où s_1 et s_2 sont des réflexions d'axes parallèles à D. Donc $t_2\circ s$ est une réflexion s' d'axe D' parallèle à D. Il en résulte que $f = t_1\circ s'$, où le vecteur V(t1) de t_1 et l'axe de s' sont parallèles. C'est une **symétrie glissée**.



Si Δ et Δ' sont parallèles, alors Δ'' ne leur est pas parallèle (car on a supposé que les trois axes ne sont pas parallèles). On applique alors le raisonnement précédent à $f^{-1} = \sigma\circ\sigma'\circ\sigma''$. Il prouve que

$f^{-1} = t_1\circ s'$, donc $f = s'\circ t_1^{-1} = t_1^{-1}\circ s'$ (car t_1 et s' commutent).

<u>Unicité de la décomposition</u> : On montre que l'axe D' de s' est la seule droite stable par f .

6) <u>Isométries laissant fixe un point</u> O <u>du plan:</u>

L'ensemble $\mathcal{O}^+(\mathbb{P})_O$ des déplacements du plan fixant O est un sous-groupe de $\mathcal{O}^+(\mathbb{P})$, formé des rotations de centre O . Il est commutatif, isomorphe (par l'application $\rho \longmapsto \vec{\rho}$) au groupe $\mathcal{O}^+(\vec{\mathbb{P}})$ des rotations de $\vec{\mathbb{P}}$. Par le choix d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'origine O il est isomorphe au groupe SO(2) des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $a,b \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2 = 1$.

L'ensemble $\mathcal{O}(\mathbb{P})_O$ des isométries du plan fixant O , est un sous-groupe de $\mathcal{O}(\mathbb{P})$. Il est formé des rotations de $\mathcal{O}^+(\mathbb{P})_O$ et des réflexions d'axe contenant O . Ce groupe n'est pas commutatif:

si ρ est une rotation de centre O et σ une réflexion d'axe contenant O , on a $\rho\sigma = \sigma\rho^{-1}$.

Cette relation est équivalente à l'assertion: " une réflexion renverse les angles" .

§3 Similitudes

On se place toujours dans le plan euclidien (orienté ou non) $\mathbb{P}$.

1) <u>Similitudes directes ou indirectes:</u>

<u>Définition 1</u>: On appelle **similitude** du plan $\mathbb{P}$ toute application f de $\mathbb{P}$ dans lui même, pour laquelle il existe un nombre λ (>0, appelé **rapport** de f) tel que, quels que soient A et B: $f(A)f(B) = \lambda AB$.

Les dilatations (homothéties ou translations) et isométries sont des similitudes, ainsi que leurs composées. Inversement:

<u>Théorème 1</u>: Toute similitude de rapport λ (>0) est la composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport λ. Il en résulte que toute similitude est inversible, et a pour inverse une similitude.

En effet si h est une homothétie de rapport λ, l'application composée $g = h^{-1}\circ f$ est une isométrie. Donc $f = h\circ g$. Et bien sûr f est inversible, d'inverse $g^{-1}\circ h^{-1}$ qui est de rapport $1/\lambda$.

<u>Corollaire</u>: L'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{P})$ des similitudes du plan est un sous-groupe du groupe des bijections du plan. L'application "rapport" est un homomorphisme surjectif de $\mathcal{S}(\mathbb{P})$ sur le groupe multiplicatif $]o,+\infty[$, son noyau est le groupe $\mathcal{O}(\mathbb{P})$ des isométries de $\mathbb{P}$.

<u>Lemme</u>: Soit f une similitude qui s'écrit $h\circ g$ (h homothétie et g isométrie), et soient $A\neq B$ et $C\neq D$ quatre points, alors

Si g est un déplacement, on a $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{f(A)f(B)},\overrightarrow{f(C)f(D)})$

Si g est un antidéplacement, on a $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = -(\overrightarrow{f(A)f(B)},\overrightarrow{f(C)f(D)})$

En effet: $(\overrightarrow{g(A)g(B)},\overrightarrow{g(C)g(D)}) = (\overrightarrow{h\circ g(A)h\circ g(B)},\overrightarrow{h\circ g(C)h\circ g(D)})$, puisque h est une homothétie. Si g est un déplacement on a $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{g(A)g(B)},\overrightarrow{g(C)g(D)})$, d'où la première assertion. Tandis que si g est un antidéplacement on a $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = -(\overrightarrow{g(A)g(B)},\overrightarrow{g(C)g(D)})$.

<u>Définition 2</u> : On dit qu'une similitude est **directe** si elle conserve les angles (orientés de vecteurs). On dit qu'elle est **indirecte** si elle inverse les angles. L'ensemble des similitudes directes (resp. indirectes) est noté $\mathcal{S}^+(\mathbb{P})$ (resp. $\mathcal{S}^-(\mathbb{P})$).

Il résulte du lemme que si f est directe (resp. indirecte), dans toute décomposition de f en une homothétie h' et une isométrie g', l'isométrie g' est un déplacement (resp. antidéplacement).

<u>Propriétés des similitudes liées au caractère affine.</u>

Les similitudes directes sont des transformations affines (puisque ce sont des composées d'une isométrie et d'une homothétie). Il en résulte que toute similitude f:

transforme une droite en une droite.

transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles.

transforme le barycentre des (A_i,α_i) en le barycentre des $(f(A_i),\alpha_i)$.

Propriétés métriques. Par définition une similitude de rapport λ multiplie les distances par λ ; elle transforme un cercle en un cercle, elle conserve ou renverse les angles orientés de vecteurs; en particulier elle transforme deux droites orthogonales en deux droites orthogonales.

2) Les similitudes directes:

Théorème 2: Une application injective f de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$, est une similitude directe si et seulement si il existe un angle de vecteurs ω tel que, quels que soient A et B dans $\mathbb{P}$, on ait : $(\overrightarrow{AB},f\overrightarrow{(A)f(B)}) = \omega$.

Démonstration: Si $f = h\circ d$ où d est un déplacement d'angle ω et h une dilatation de rapport positif, on a :

$$(\overrightarrow{AB},f\overrightarrow{(A)f(B)}) = (\overrightarrow{AB},d\overrightarrow{(A)d(B)}) + (d\overrightarrow{(A)d(B)},h\circ d\overrightarrow{(A)h\circ d(B)}) = \omega + 0$$

Réciproquement si f vérifie la condition angulaire, choisissons un déplacement d d'angle ω. Alors $g = f\circ d^{-1}$ vérifie $(\forall A \text{ et } B)\ (\overrightarrow{AB},g\overrightarrow{(A)g(B)}) = 0$. Ainsi $(\forall A \text{ et } B)\ \ g\overrightarrow{(A)g(B)} = \lambda_{AB}\ \overrightarrow{AB}$ avec $\lambda_{AB} > 0$. Nous savons (théorème fondamental amélioré de la théorie des dilatations) qu'une telle application est une dilatation de rapport positif.

Corollaire: Soit f une application injective de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$, une condition nécessaire et suffisante pour que f soit une similitude directe est que:

$$(\forall A,B,C \text{ et } D) \qquad (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = (f\overrightarrow{(A)f(B)},f\overrightarrow{(C)f(D)})$$

En effet cette relation angulaire est équivalente à :

$$(\forall A,B,C \text{ et } D) \quad (\overrightarrow{AB},f\overrightarrow{(A)f(B)}) = (\overrightarrow{CD},f\overrightarrow{(C)f(D)})$$

Il existe donc un angle ω tel que $(\forall A \text{ et } B)\ (\overrightarrow{AB},f\overrightarrow{(A)f(B)}) = \omega$; et il reste à utiliser le théorème 2.

Le groupe des similitudes directes

La composée de deux similitudes directes est une similitude directe (utiliser le corollaire ou le théorème 2), de plus l'inverse d'une similitude directe est une similitude directe (utiliser encore le corollaire ou le théorème 2). Ceci montre que les similitudes directes forment un sous-groupe $\mathscr{S}^+(\mathbb{P})$ du groupe $\mathscr{S}(\mathbb{P})$ des similitudes du plan.

A toute similitude directe on peut associer son rapport, ceci nous donne un homomorphisme de $\mathscr{S}^+(\mathbb{P})$ dans le groupe multiplicatif $]0,\infty[$.

A toute similitude directe on peut associer son angle (théorème 2), ceci nous donne un homomorphisme de $\mathscr{S}^+(\mathbb{P})$ dans le groupe $\mathscr{A}$ des angles de vecteurs.

Signalons encore que les similitudes sont des applications affines (puisque composées d'applications affines). L'application linéaire associée à une similitude directe est caractérisée par l'angle ω et le rapport λ : elle consiste à multiplier le vecteur par λ, puis à le faire tourner de ω.

3) Formes réduites des similitudes directes:

Théorème 3: Parmi les similitudes directes nous trouvons les translations. Soit f une similitude directe qui n'est pas une translation, c'est à dire telle que, soit son rapport λ est différent de 1, soit son angle ω est différent de 0. Alors f a un unique point fixe.

Démonstration analytique: Une origine O étant choisie, les points fixes Ω sont donnés par l'équation

$$\overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{Of(O)} + \vec{f}(\overrightarrow{O\Omega})$$

Si $\varphi = Id - \vec{f}$ est inversible, cette équation a une unique solution. Si $\lambda \neq 1$, φ est injective (en effet $\varphi(\vec{V}) = \vec{V} - \vec{f}(\vec{V})$ ne peut être nul si $\vec{V} \neq 0$, puisque les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{f}(\vec{V})$ ne sont pas de même longueur), donc φ est bijective. Si $\omega \neq 1$, φ est injective (en effet $\varphi(\vec{V}) = \vec{V} - \vec{f}(\vec{V})$ ne peut être nul si $\vec{V} \neq 0$, puisque les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{f}(\vec{V})$ n'ont pas même direction orientée), donc φ est bijective. Ainsi si $\vec{f} \neq Id$, c'est à dire si f n'est pas une translation, il y a un unique point fixe.

Théorème 4: Toute similitude directe qui n'est pas une translation est caractérisée par son centre O son rapport λ et son angle ω. C'est la composée $s(O,\omega, \lambda)$ de la rotation de centre O et d'angle ω et de l'homothétie de centre O et de rapport λ (dans l'ordre que l'on veut).

L'ensemble $\mathscr{S}^+(\mathbb{P})_O$ des similitudes directes de centre O est un sous groupe du groupe $\mathscr{S}^+(\mathbb{P})$; on a : $s(O,\alpha,\lambda)\circ s(O,\alpha',\lambda') = s(O,\alpha+\alpha',\lambda\lambda')$, ce groupe est donc abélien (isomorphe à $\mathbb{C}^*$).

4) Écriture complexe des similitudes directes

Précaution**:** Dans la littérature classique le mot argument désigne deux choses: un angle, ou la mesure de cet angle. On peut adopter l'un ou l'autre point de vue. Mais il faut adopter un discours cohérent. Si un argument est un angle, alors on parle de l'égalité de deux arguments (sans le mod 2π), mais on n'a pas le droit de parler de $\pi/2$. Si c'est une mesure d'angle elle est définie mod 2π, et toutes les égalités sont mod 2π. . Ici on définit Arg(z) comme l'angle et arg(z) comme une mesure de cet angle.

Dans la suite on considère la bijection de $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{C}$ associée à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ de $\mathbb{P}$: au point M de $\mathbb{P}$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ on associe son affixe $z_M = x+iy$. Grâce à cette bijection on associe à une application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ une application f_P de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$.

Les transformations $z \longmapsto az$

Donnons nous un nombre complexe a non nul et considérons l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe az . Nous allons étudier f_P.

Si a est réel positif: pour tout M nous avons $\overrightarrow{Of_P(M)} = a\,\overrightarrow{OM}$. Donc f_P est une homothétie de centre O et de rapport a .

Si a est de module 1 (et d'Argument ω): pour tout point M nous avons $Of_P(M) = OM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Of_P(M)}) = \omega$ (car Arg az = Arg z + Arg a, c'est à dire

$(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Of_p(M)}) = (\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}) + \omega)$. Donc f_P est la rotation de centre O et d'angle ω.

De façon générale a s'écrit comme le produit de son module par un nombre complexe de module 1. Donc f est la composée (dans un ordre quelconque) de $z \longmapsto |a|z$ et de $z \longmapsto \frac{a}{|a|} z$. Ainsi f_P est la composée d'une homothétie et d'une rotation, toutes deux de centres O c'est la similitude directe de centre O, d'angle Arg(a) et de rapport $|a|$.

<u>Les transformations $z \longmapsto az + b$</u>

Donnons nous deux nombres complexes a et b ($a \neq 0$) et considérons l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe az+b.

Si a = 1, f_P est une translation, c'est une similitude directe (sans centre) d'angle 0 et de rapport 1 .

Si $a \neq 1$, f_P a un unique point fixe Ω. Il est donné par l'équation $\omega = a\omega+b$ (d'où $\omega = \frac{b}{1-a}$). Nous avons alors pour tout z: $f(z) - \omega = a(z - \omega)$. Et si nous identifions $\mathbb{C}$ à $\mathbb{P}$ grâce au repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$, dans cette nouvelle identification les formules de f_P s'écrivent $z \longmapsto az$, donc f_P est la similitude directe de centre Ω, d'angle Arg(a) et de rapport $|a|$.

<u>Le groupe des similitudes directes</u>

Soit G l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \longmapsto az+b$ (a et b dans $\mathbb{C}$, $a \neq 0$). Il est clair que G est stable par composition, et que les éléments de G sont inversibles et ont leurs inverses dans G (l'inverse de $z \longmapsto az+b$ est $z \longmapsto a^{-1}z - ba^{-1}$). Et comme G est non vide ceci implique que c'est un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{C}$.

Il en résulte que les applications de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ dont les formules (dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$) sont de la forme $z \longmapsto az+b$ forment un sous-groupe S_+ du groupe des bijections de $\mathbb{P}$. Nous avons démontré que ce groupe contient uniquement:

* des translations de $\mathbb{P}$.
* pour tout point Ω de $\mathbb{P}$, des similitudes directes de centre Ω .

<u>Réciproquement</u> toute translation est dans S_+ (c'est clair), et pour tout point Ω d'affixe ω les similitudes directes de centre Ω sont dans S_+ (on vérifie que la similitude de centre Ω d'angle θ et de rapport λ est l'application $z \rightarrow \lambda e^{i\theta}(z-\omega) + \omega$).

Donc $S_+ = \mathscr{S}^+(P)$: toute similitude directe a une écriture complexe de la forme $z \longmapsto az+b$, son rapport est $|a|$ et son angle est Arg(a).

Nous pouvons aussi associer à $z \longmapsto az+b$, le nombre complexe a. Nous obtenons un homomorphisme ψ de $\mathscr{S}^+(P)$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$. Le nombre complexe a caractérise l'application linéaire associée: le groupe des similitudes linéaires directes est isomorphe à $\mathbb{C}^*$.

5) <u>Écriture complexe des similitudes indirectes</u>

Toute similitude indirecte est le produit d'une similitude directe (variable) et d'une similitude indirecte fixée. Pour cette dernière similitude indirecte on peut choisir une réflexion et même plus précisément dans le plan complexe la réflexion par rapport à l'axe des réels, qui

correspond à la conjugaison. Ainsi d'après 4), les similitudes indirectes apparaissent comme les transformations de la forme $z \longmapsto a\bar{z}+b$. Ces transformations sont moins usitées; on montre (cf. exercice 17.6) :

<u>Proposition</u>: Une similitude indirecte de rapport λ différent de 1 est le produit commutatif d'une homothétie (de centre O et de rapport λ) et d'une réflexion d'axe contenant O

III RÉSULTATS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

§ 1 - Le triangle

ABC désigne un triangle non aplati. On posera BC = a, CA = b, AB = c.

Les droites remarquables

- Les trois **médianes** de ABC se coupent en un point G, **centre de gravité** du triangle. Si A' est le milieu de [BC], on a $AG = \frac{2}{3}$ AA'.
- Les trois **médiatrices** de ABC se coupent en un point O, centre du **cercle circonscrit** à ABC.
- Les trois **bissectrices intérieures** de ABC se coupent en un point I, centre du **cercle inscrit** à ABC.
- Les trois **hauteurs** de ABC se coupent en un point H, **orthocentre** du triangle ABC.
- La bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$ et les bissectrices extérieures des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ se coupent en un point I_a, centre du **cercle exinscrit** dans l'angle $\hat{A}$ du triangle ABC.
- Soient I le pied de la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$ et J le pied de la bissectrice extérieure de l'angle $\hat{A}$. On a : $\frac{IB}{IC} = \frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC}$.

Théorème des Sinus

- $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(R est le rayon du cercle circonscrit à ABC).

Théorèmes de Ménélaüs et Céva

Soient M un point de la droite (BC), N un point de (AC), P un point de (AB).

- Les trois points M, N, P sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1 \qquad \text{(Ménélaüs)}$$

- Les trois droites (AM), (BN), (CP) sont concourantes si et seulement si

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1 \qquad \text{(Céva).}$$

- Droite et cercle d'Euler

Soient A' le milieu de [BC], B' celui de [CA], C' celui de [AB], G le centre de gravité de ABC.

- A'B'C' est l'homothétique de ABC dans l'homothétie h de centre G, de rapport $-\frac{1}{2}$.
- G est le centre de gravité de A'B'C'.
- L'image de O (centre du cercle circonscrit à ABC) par h est H (orthocentre de ABC).

  Ainsi les points G, O, H sont alignés, $\frac{\overline{GO}}{\overline{GH}} = -\frac{1}{2}$, les hauteurs de A'B'C' sont les médiatrices de ABC. La droite (GH) est la **droite d'Euler** de ABC.
- Le centre du cercle circonscrit à A'B'C' est le milieu de [HO].
- Dans ABC, les pieds des hauteurs, les pieds des médianes, les milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets sont sur un même cercle. C'est le **cercle d'Euler** ou **cercle des neuf points** de ABC.

Surface du triangle

Soient S la surface de ABC, h_a la longueur de la hauteur issue de A, p le demi-périmètre, R le rayon du cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit. et r_a le rayon du cercle exinscrit dans l'angle $\hat{A}$; on a alors :

$$S = \frac{h_a.a}{2} = \frac{1}{2}\,bc \sin A = pr = (p-a)r_a$$

Et aussi : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}$.

§ 2 - Le cercle

Points cocycliques

- Si trois points A, B, M sont sur un même cercle de centre O , on a :

  $2(MA,MB) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.
- Si Δ est la tangente en A à ce cercle on a $(\Delta,AB) = (MA,MB)$.
- Pour que quatre points A, B, C, D non alignés soient cocycliques, il faut et il suffit que

  $(AB,AC) = (DB,DC)$

  ce qui est équivalent à

  $2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 2(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})$

La droite de Simson

- Soient α, β et γ les projections orthogonales d'un point M du plan sur les côtés d'un triangle ABC. Les points α, β et γ sont alignés si et seulement si M appartient au cercle circonscrit à ABC. (Dans ce cas la droite $\alpha\beta\gamma$ est la **droite de Simson** du point M).
- Les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés du triangle sont sur le cercle circonscrit.

Puissance d'un point par rapport à un cercle

- Soient $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, de rayon R et M un point du plan. On pose OM = d. Pour toute droite Δ passant par M et coupant le cercle en A et B, on a $\overline{MA}.\overline{MB} = d^2-R^2$. Le produit $\overline{MA}.\overline{MB}$ est donc indépendant de Δ. C'est la **puissance du point** M **par rapport au cercle** $\mathscr{C}$. On la note $P_{\mathscr{C}}(M)$.
  $P_{\mathscr{C}}(M)$ est donc strictement positive si M est extérieur à $\mathscr{C}$, strictement négative si M est intérieur à $\mathscr{C}$.
- Soient A,B,C,D quatre points tels que (AB) et (CD) se coupent en un point M. Les quatre points A,B,C,D sont cocycliques si et seulement si $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$.

Axe radical de deux cercles

- L'ensemble des points M ayant même puissance par rapport à deux cercles est une droite perpendiculaire à la ligne des centres. Cette droite est **l'axe radical** des deux cercles.
  - Si les deux cercles se coupent en A et B, l'axe radical est la droite (AB). Si les deux cercles sont tangents, l'axe radical est leur tangente commune.
  - Si M est un point de l'axe radical extérieur aux deux cercles, les tangentes issues de M aux deux cercles sont de longueurs égales.
- On dit que deux cercles sont **orthogonaux** s'ils sont sécants et si leurs tangentes en un point d'intersection sont perpendiculaires.
- Deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, de centres O_1 et O_2, de rayon R_1 et R_2 sont orthogonaux si et seulement si la puissance du centre de l'un par rapport à l'autre est égale au carré de son propre rayon
  c'est-à-dire $P_{\mathscr{C}_2}(O_1) = R_1^2$ ou $P_{\mathscr{C}_1}(O_2) = R_2^2$.
- Deux cercles sont orthogonaux si et seulement si la somme des carrés de leurs rayons est égale au carré de la distance des centres.

Faisceaux de cercle

- Un **faisceau de cercle** est un ensemble de cercles admettant deux à deux le même axe radical.
  Les faisceaux de cercle se divisent en trois genres.
- Un **faisceau à points de base** A et B est l'ensemble de tous les cercles passant par A et B.
- Un **faisceau à points de Poncelet** (ou **points limites** I et J) est l'ensemble de tous les cercles dont les extrémités d'un diamètre divisent harmoniquement le segment IJ (ils sont donc orthogonaux au cercle de diamètre [IJ] et de centre sur (IJ)).
- Un **faisceau de cercles tangents** est l'ensemble de tous les cercles tangents en un point A à une droite Δ.
- Deux cercles d'un faisceau le définissent entièrement.

- Soient $\mathscr{F}$ un faisceau, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux cercles de $\mathscr{F}$. Si $\mathscr{C}'$ est un cercle orthogonal à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, il est orthogonal à l'ensemble des cercles de $\mathscr{F}$.
  L'ensemble de ces cercles $\mathscr{C}'$ est un faisceau $\mathscr{F}'$. Les cercles de $\mathscr{F}$ sont orthogonaux à ceux de $\mathscr{F}'$. On dit que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont deux **faisceaux orthogonaux**.
  Si $\mathscr{F}$ est à points de base A et B, $\mathscr{F}'$ est à points-limites A et B et réciproquement.

§ 3 L'inversion dans le plan

- Soient O un point, k un réel non nul. **L'inversion de centre** (ou pôle) O et **de puissance** (ou module) k est l'application de $\mathbb{P}^*$ (plan privé de O) dans $\mathbb{P}^*$ qui à M fait correspondre M' tel que O,M,M' sont alignés et $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$.
- Une inversion I est involutive ($I \circ I = Id$).
- Une droite d est invariante par I si et seulement si elle contient O.
- Si M et N ont pour image M' et N' dans une inversion de centre O , les quatre points M, N, M' et N' sont cocycliques (alignés si O, M, N sont alignés). Cette propriété caractérise les inversions et les symétries axiales.
- L'ensemble des points fixes d'une inversion I(O,k) de puissance $k > 0$ est le cercle de centre O de rayon $\sqrt{k}$: C'est le **cercle d'inversion**.
- Un cercle $\mathscr{C}$ est invariant par I(O,k) (mais pas fixe point par point) si et seulement si $P_{\mathscr{C}}(O) = k$. Si $k > 0$, un cercle est invariant si et seulement s'il est orthogonal au cercle d'inversion.
- Si A' et B' sont les images de deux points A et B par I(O,k) on a :
  $$A'B' = AB\,\frac{|k|}{OA.OB}\ .$$
- Une inversion est différentiable. En chaque point sa différentielle est une similitude indirecte. Une inversion conserve donc les angles en grandeur et change leur orientation.
- Le produit de deux inversions de même centre est une homothétie :
  $$I(O,k)I(O,\ell) = \mathrm{Hom}\left(O,\frac{k}{\ell}\right).$$
- L'inverse d'une droite ne passant pas par le centre d'inversion est un cercle passant par ce centre.
- L'inverse d'un cercle passant par le centre est une droite perpendiculaire au diamètre passant par ce centre.
  En général il existe deux inversions qui échangent un cercle et une droite vérifiant ces conditions.
- L'inverse d'un cercle ne passant pas par le centre est un cercle ne passant pas par le centre.

Deux cercles de ce type sont déduits l'un de l'autre par deux inversions en général (une seule s'ils sont tangents ou de même rayon). Les centres de ces inversions sont les centres d'homothétie des deux cercles.

Applications

Théorème de Ptolémée

Un quadrilatère ABCD est convexe inscriptible si et seulement si :

$$AB.CD + BC.AD = AC.BD.$$

Théorème de Feuerbach

Le cercle inscrit, les trois cercles exinscrits d'un triangle sont tangents au cercle d'Euler de ce triangle.

Et bien d'autres applications à des problèmes de construction ...

§ 4 Points alignés, droites concourantes

Théorème de Desargues

Soient deux triangles ABC et A'B'C'. On désigne par α,β,γ les points de rencontre des droites (AB) et (A'B'), (BC) et (B'C'), (CA) et (C'A') respectivement. Les points α, β et γ sont alignés si et seulement si les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes (ou parallèles).

(On exclut le cas où deux quelconques de ces neuf droites sont égales).

(Dans ces résultats trois droites parallèles peuvent être considérées comme concourantes (elles se coupent en un "point à l'infini"). Les trois points α, β, γ peuvent être alignés sur "la droite à l'infini" c'est-à-dire que l'on peut avoir (AB) // (A'B'), (BC) // (B'C') et (CA) // (C'A')).

Théorème de Pappus

Soient A,C,E trois points d'une droite d et B,F,D trois points d'une droite d'. On désigne par α, β, γ les points de rencontre des droites (AB) et (DE), (AF) et (CD), (CB) et (EF). Les points α, β et γ sont alignés.

Théorème de Brianchon

Soient six points A, B, C, D, E et F . On suppose que (AB), (CD) et (EF) se rencontrent en O et (BC), (DE) et (FA) se rencontrent en O'. Alors (AD), (BE) et (CF) sont concourantes.

- Soient O et O' deux points, d et d' deux droites passant par O. On mène par O' deux droites quelconques δ_1 et δ_2. On suppose que δ_1 coupe d en A_1 et d' en A_1',

que δ_2 coupe d en A_2 et d' en A_2'. Les droites (A_1A_2') et (A_2A_1') se coupent en C. L'ensemble des points C ainsi obtenus quand δ_1 et δ_2 varient forme une droite contenant O.

- Soient O, B et B' trois points alignés. On considère un point O' quelconque, une droite d quelconque passant par O coupant (O'B) en A et (O'B') en A'. Les droites (AB') et (BA') se coupent en C. La droite (O'C) coupe (BB') en M : le point M ne dépend ni de O' ni de d.

<u>Birapport. Division harmonique</u>

- Le **birapport** de quatre nombres (réels ou complexes) x_1,x_2,x_3,x_4 est la quantité
  $\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} : \frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}$ notée $[x_1,x_2,x_3,x_4]$.
  On a : $[x_1,x_2,x_3,x_4] = [x_3,x_4,x_1,x_2] = [x_1,x_2,x_4,x_3]^{-1} = [x_2,x_1,x_3,x_4]^{-1}$
- Si A,B,C,D sont quatre points alignés, leur **birapport** est $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ noté [A,B,C,D]. On a : $[A,B,C,D] = [C,D,A,B] = [A,B,D,C]^{-1} = [B,A,C,D]^{-1}$
- Quatre points alignés A,B,C,D forment une **division harmonique** si $[A,B,C,D] = -1$.
- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$). Alors f conserve le birapport $([f(x_1),f(x_2),f(x_3),f(x_4)] = [x_1,x_2,x_3,x_4]\ \forall x_i)$ si et seulement si f est une homographie.
- Les divisions que quatre droites concourantes fixes définissent sur des sécantes variables quelconques ont le même birapport. On peut ainsi parler du birapport de quatre droites concourantes .
- $[a,b,c,d] = -1 \Leftrightarrow 2(ab+cd) = (a+b)(c+d)$
- $[A,B,C,D] = -1 \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 = \overline{IC}.\overline{ID}$ (I étant le milieu de AB).
- Quatre droites concourantes dont le birapport est égal à -1 forment un **faisceau harmonique**.
  (Exemple : les côtés AB et AC d'un triangle et les deux bissectrices de l'angle $\hat{A}$).

IV HOMOGRAPHIES ET GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

§1 - Définitions, premières propriétés

Une **homographie** est une transformation de la forme

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad-bc \neq 0).$$

La fonction f est donc définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ sauf $z = -\frac{d}{c}$ (et, pour tout z si $c = 0$).

(On convient parfois de définir $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et on pose alors $f(\infty) = \frac{a}{c}$, $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$)

Une homographie est bijective de $\mathbb{C} - \left\{\frac{-d}{c}\right\}$ sur $\mathbb{C} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$ (ou de $\bar{\mathbb{C}}$ sur $\bar{\mathbb{C}}$).

L'ensemble des homographies est un groupe.

On peut remarquer que si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est un élément de $GL(2,\mathbb{C})$, l'application $M \longmapsto f$ définit un homomorphisme de $GL(2,\mathbb{C})$ sur le groupe des homographies. Le noyau de cet homomorphisme est $\{\lambda\ Id\}_{\lambda \in \mathbb{C}^*}$ et par suite le groupe des homographies s'identifie à $GL(2,\mathbb{C}) / \mathbb{C}^*$.

On retrouve bien sûr le fait que les coefficients d'une homographie ne sont définis qu'à un facteur multiplicatif près.

Il est souvent utile d'écrire

$$(1) \qquad f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\ \frac{1}{z + \frac{d}{c}}\ .$$

Donc, si on remarque que $z \longmapsto \frac{1}{\bar{z}}$ est une inversion, que $z \longmapsto \bar{z}$ est la symétrie par rapport à l'axe réel, on a :

Une homographie est composée d'applications du type inversion, symétrie, translation, similitude directe.

On en tire facilement :

Si $\mathscr{C}$ est un cercle ou une droite, et f une homographie, $f(\mathscr{C})$ est un cercle ou une droite (un cercle peut être envoyé sur une droite ou une droite sur un cercle comme dans l'inversion).

Une homographie est une transformation holomorphe sur $\mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ dont la dérivée n'est jamais nulle donc une homographie conserve les angles.

§2 - Homographie et birapport

Si z_1, z_2, z_3, z_4 sont quatre nombres complexes on pose

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} : \frac{z_4-z_1}{z_4-z_2} ;$$

c'est le **birapport** de z_1, z_2, z_3, z_4.

Il est facile de voir que chacune des applications qui compose une homographie conserve le birapport donc :

Toute homographie conserve le birapport.

Notons par ailleurs que si f est une application qui conserve le birapport si z_1, z_2, z_3 sont trois points distincts d'images z'_1, z'_2, z'_3 et si le point courant z a pour image z' on a $[z'_0, z'_1, z'_2, z'_3] = [z, z_1, z_2, z_3]$ ce qui, en écrivant la définition du birapport, montre que toute application qui conserve le birapport est une homographie.

Cet argument montre aussi :

Il existe une homographie et une seule qui transforme trois points donnés distincts en trois points donnés distincts.

Si un cercle $\mathscr{C}$ est donné, le choix de trois points de $\mathscr{C}$ dépend de trois paramètres réels (par exemple on repère ces points par leur angle au centre à partir d'un rayon donné). On peut donc préciser le résultat précédant en écrivant :

Il existe une famille de fonctions homographiques dépendant de trois paramètres réels transformant un cercle (ou une droite) donné (e) en un cercle (ou une droite) donné (e).

<u>Exemple</u>:

Soient D l'axe réel, $\mathscr{C} = \mathscr{C}(O,R)$ un cercle de centre O.

Soit f une homographie transformant D en $\mathscr{C}$.

Soit z_0 le point envoyé en O, z_1 le point envoyé à l'∞. Les "cercles" passant par O et l'∞ sont en fait des droites orthogonales au cercle $\mathscr{C}(O,R)$. Donc, comme f conserve les angles, tout cercle passant par z_0 et z_1 doit être orthogonal à D ce qui implique que $z_1 = \bar{z}_0$ et on a $f(z) = \lambda \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Mais si $z \in \mathbb{R}$, $|f(z)| = R$ et $|z-z_0] = |z-\bar{z}_0|$ et ainsi $\lambda = Re^{i\alpha}$.

On a ainsi toutes les homographies qui appliquent D sur $\mathscr{C}$, elles sont de la forme $f(z) = Re^{i\alpha} \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$, ($\alpha$ et z_0 définissent bien trois paramètres réels).

§3 - Points fixes d'une homographie

L'équation des points fixes de f est $\frac{az+b}{cz+d} = z$ c'est-à-dire $cz^2+(d-a)z-b = 0$.

• Si $c = 0, d = a, b = 0$ c'est l'identité, $f(z) = z$.

• Si $c = 0$, on a un point fixe (si $d \neq a$) - et un point fixe à l'infini.

• Si $c \neq 0$ on a deux points fixes éventuellement confondus.
(i) Supposons que f ait deux points fixes distincts O_1 et O_2 d'affixes z_1 et z_2.
Soit z_3 un point distinct de z_1 et z_2. On peut alors écrire :

$$\frac{f(z)-z_1}{f(z)-z_2} = \lambda \frac{z-z_1}{z-z_2} \text{ où } \lambda = \frac{f(z_3)-z_1}{f(z_3)-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} .$$

a) Supposons $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a alors, en désignant par M l'image de $f(z)$ et m l'image de z :

$$(\overrightarrow{MO_1},\overrightarrow{MO_2}) = \text{Arg } \lambda + (\overrightarrow{mO_1},\overrightarrow{mO_2})$$

et $\text{Arg } \lambda = 0$ ou Π donc : $(MO_1,MO_2) = (mO_1,mO_2)$.

Les quatre points M, m, O_1, O_2 sont cocycliques.

On voit donc que les cercles du faisceau à points de base O_1 et O_2 sont conservés par f.

b) Supposons $|\lambda| = 1$

On a alors $\frac{MO_1}{MO_2} = \frac{mO_1}{mO_2}$: les cercles du faisceau à points-limites O_1 et O_2 sont conservés par f.

(ii) Supposons maintenant que f admette un point fixe O_1 double. Notons que cela arrive si :

$$(d-a)^2+4bc = (d+a)^2-4(ad-bc) = 0.$$

Soit z_1 l'affixe de ce point fixe.

Si $z_1 = 0$ c'est que $a = d$ et $b = 0$ et donc $f(z) = \frac{az}{cz+a}$ que l'on peut écrire $\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + \frac{c}{a}$.

En général, en remplaçant z par $z-z_1$, on voit que $\frac{1}{f(z)-z_1} = \frac{1}{z-z_1} + \frac{c}{a}$.

Dans ce cas les cercles du faisceau de cercles tangents en O_1 à la droite dirigée par $\frac{\bar{c}}{a}$ sont conservés.

En effet, en nous ramenant à $z_1 = 0$, fixons un point M d'affixe z sur un tel cercle. La droite D passant par le point d'affixe $\frac{1}{z}$ et dirigée par $\frac{c}{a}$ contient le point $\frac{1}{f(z)}$ (car $\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + \frac{c}{a}$). La composée de l'inversion $\varphi(0_1,1)$ et de la symétrie d'axe réel transforme la droite D en le cercle donné qui contient donc $f(z)$.

§4 - Homographies et géométrie de Poincaré

Soit $\mathbb{H}$ le demi-plan de Poincaré.

Les homographies qui conservent $\mathbb{H}$ sont de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad-bc > 0$.

En effet, si f conserve $\mathbb{H}$ elle conserve sa frontière c'est-à-dire l'axe réel. On peut donc définir f en choisissant trois points M_1, M_2, M_3 sur $\mathbb{R}$ et leurs images sur $\mathbb{R}$, $f(M_1)$, $f(M_2)$, $f(M_3)$. En procédant par identification on calcule a, b, c, d qui sont donc réels (On remarquera que ces quatre coefficients sont définis par trois équations ce qui est normal puisqu'ils sont homogènes).

Par ailleurs, $\operatorname{Im} f(z) = \frac{(ad-bc)\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$ nous montre que $\mathbb{H}$ ne peut être conservé que si $(ad-bc) > 0$.

Ces deux conditions sur les coefficients sont suffisantes. De $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ on tire que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et, puisque $\mathbb{H}$ est connexe et de frontière égale à $\mathbb{R}$, $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ ou $f(\mathbb{H}) = -\mathbb{H}$.

La deuxième assertion ne peut se produire puisque $(ad-bc) > 0$ montre que les signes des parties imaginaires de z et $f(z)$ sont les mêmes.

Il est temps de remarquer maintenant que l'application $s : z \longmapsto -\bar{z}$ conserve aussi $\mathbb{H}$. En composant s avec des homographies conservant $\mathbb{H}$ on voit que les applications de la forme $f(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ conservent $\mathbb{H}$ si et seulement si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad-bc < 0$.

<u>Les isométries de $\mathbb{H}$</u>

• La longueur d'un arc de courbe γ de $\mathbb{H}$ est définie par $\ell(\gamma) = \int_\gamma \frac{ds}{y}$. On vérifie facilement que les homographies de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ laissant $\mathbb{H}$ invariant conservent la longueur

$$\left(\left| \frac{df(z)}{dz} \right| = \frac{|ad-bc|}{|cz+d|^2} \text{ et } \left| \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z} \right| = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} \right)$$

ainsi que $s : z \longmapsto -\bar{z}$ et, par composition, les transformations du type $g(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$.

• On met donc ainsi en évidence des isométries de $\mathbb{H}$.

En particulier apparaissent les symétries par rapport aux $\mathbb{H}$-droites :

• Si Δ est une droite de $\mathbb{H}$ de la forme $\Delta = \{z = x+iy \ ; \ x = c, \ y > 0\}$ la symétrie (au sens usuel) : $z \longmapsto \bar{z}+2c$ est une isométrie involutive de $\mathbb{H}$ dont l'ensemble des points fixes est Δ.

• Si Δ est une droite de $\mathbb{H}$ de la forme $\Delta = \{z = x+iy\ ;\ (x-a)^2+y^2 = R^2,\ a \in \mathbb{R},\ R > 0,\ y > 0\}$ l'inversion de centre A (d'affixe a), de puissance R^2 est aussi une isométrie involutive de $\mathbb{H}$ ayant Δ comme ensemble de points fixes (son équation est de la forme $g(z) = \frac{R^2}{\bar{z}-a} + a$).

<u>Remarque</u> : On peut montrer que les segments de droite au sens de $\mathbb{H}$ sont des géodésiques pour cette distance en se ramenant, par une inversion convenable à des segments de droite "verticaux" (cf. la première partie du cours de géométrie de MFM).

• On a donc toutes les symétries de $\mathbb{H}$.

On va classer l'ensemble des isométries en examinant les points fixes de ces transformations.

1) Si $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, l'équation des points fixes est $cz^2 + (d-a)z - b = 0$, équation de degré 2 dont le discriminant est $\Delta = (d+a)^2-4(ad-bc)$.

Par conséquent :

a) Si $\Delta < 0$, f a un seul point fixe dans $\mathbb{H}$.

b) Si $\Delta = 0$, f a un point fixe réel double (pas de point fixe dans $\mathbb{H}$).

c) Si $\Delta > 0$, f a deux points fixes réels distincts (pas de point fixe dans $\mathbb{H}$).

2) Si $g(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, l'équation des points fixes est

$$c|z|^2 + dz - a\bar{z} - b = 0 \text{ dont on tire :}$$

$$c|z|^2 + d\bar{z} - az - b = 0.$$

Par différence on voit que $(z-\bar{z})(d+a) = 0$.

a) Si $d+a \neq 0$ on a $y = 0$. Il n'y a pas de points fixes dans $\mathbb{H}$ et on a $cx^2+(d-a)x-b = 0$.

C'est une équation de degré 2 dont le discriminant est $(a+d)^2-4(ad-bc)$. Comme $a+d \neq 0$ et $ad-bc < 0$, ce discriminant est > 0 : il y a deux points fixes réels distincts et donc pas de point fixe dans $\mathbb{H}$.

b) Si $d+a = 0$ l'équation se ramène à $c(x^2+y^2)+(d-a)x-b = 0$ dont on vérifie facilement (avec $a+d = 0$ et $ad-bc = 0$) que c'est l'équation d'une droite de $\mathbb{H}$.

• Appelons I l'ensemble de toutes les isométries de $\mathbb{H}$, I^+ l'ensemble des isométries de la forme $z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$ et I^- l'ensemble des isométries de la forme $z \longmapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$.

On remarquera que les symétries sont dans I^- et que le produit de deux symétries est dans I^+.

On sait (première partie du cours de géométrie MFM, Th. 6.6) que toute isométrie est le produit d'au plus trois symétries. Comme on dispose de toutes les symétries possibles (une pour chaque droite !) on va pouvoir construire l'ensemble I en entier - et vérifier que c'est $I^+ \cup I^-$.

1) Soient φ_1 et φ_2 deux symétries d'axes Δ_1 et Δ_2 trois cas apparaissent :

a) $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{A\}$: Alors $\varphi_1\varphi_2$ est un élément de I^+ ayant un seul point fixe A dans $\mathbb{H}$. (on peut l'appeler "rotation de centre A"). Réciproquement si $f \in I^+$ a un seul point fixe $A \in \mathbb{H}$, si Δ_1 est une droite passant par A et φ_1 est la symétrie associée, $f \circ \varphi_1 = \varphi_2$ est une symétrie dont l'axe passe par A.

b) $\Delta_1 // \Delta_2$: Soit P le point de $\mathbb{R}$ commun aux deux cercles support de Δ_1 et Δ_2 : alors $\varphi_1\varphi_2$ est un élément de I^+ ayant P comme point fixe réel double. La réciproque s'énonce et se montre comme ci-dessus. On peut décider que $\varphi_1\varphi_2$ est alors une "translation" mais il est difficile de lui attribuer un vecteur : $\mathbb{H}$ ne s'identifie pas à un espace affine sur un corps !

c) Δ_1 et Δ_2 sont hyperparallèles : Les deux droites Δ_1 et Δ_2 définissent alors un faisceau de cercles à points limites A_1 et A_2. On voit alors que $\varphi_1\varphi_2$ est un élément de I^+ ayant deux points fixes réels A_1 et A_2 et la réciproque est comme plus haut.

2) Le produit de trois symétries est dans I^-. Si on compose un élément de I^- avec une symétrie quelconque, on trouve nécessairement un élément de I^+ donc le produit de deux symétries.

On a donc accompli notre programme :

Les isométries de $\mathbb{H}$ sont de la forme $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad-bc > 0$ ou $g(z) = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad-bc < 0$. Toute isométrie de $\mathbb{H}$ est le produit d'au plus trois symétries.

<u>Exercice</u> : Vérifier la cohérence de tout ce qui précède si on regarde les cas particuliers donnés par $c = 0$.

V QUELQUES RÉSULTATS SUR LES CONIQUES

(formulation géométrique)

§ 1 Définitions

- Foyer et cercle directeur

  Soient F et F' deux points, D un cercle de centre F' ($F \notin D$) ou une droite. L'ensemble des points M centres des cercles tangents à D et passant par F est une **conique**. Si D est un cercle, si F est intérieur à D, cet ensemble est une **ellipse**, si F est extérieur à D, c'est une **hyperbole**. Si D est une droite, cet ensemble est une **parabole** (alors F' n'existe pas). D est le **cercle directeur** (ou la **droite directrice**) de la conique, F le **foyer** associé.

- Foyer et directrice

  Soient F un point, D une droite ($F \notin D$), e un nombre strictement positif. L'ensemble des points M tel que $\frac{MF}{MH} = e$ (H étant la projection orthogonale de M sur D) est une **conique**. C'est une **ellipse** si $e < 1$, une **parabole** si $e = 1$, une **hyperbole** si $e > 1$. (D est la **directrice**, F le **foyer** associé, e **l'excentricité**).

- Deux foyers

  Soient F et F' deux points et a un nombre positif. L'ensemble des points M tels que $MF+MF' = 2a$ est une **ellipse**, l'ensemble des points M tels que $|MF-MF'| = 2a$ est une **hyperbole** ($2a > FF'$ dans le premier cas, $2a < FF'$ dans le second). On dit que F et F' sont les **foyers** de la conique, $FF' = 2c$ est la **distance focale**, $\frac{c}{a}$ est **l'excentricité**.

- Section conique

  Une conique est une section plane d'un cône de révolution Γ. Soit P le plan de section, P' le plan parallèle à P passant par le sommet du cône. L'intersection de P et de Γ est une **ellipse** si P' est extérieur au cône, une **hyperbole** si P' est sécante au cône, une **parabole** si P' est tangente au cône.

§ 2 L'ellipse

- Une ellipse admet deux axes de symétrie orthogonaux et un centre de symétrie.
- Par tout point M de l'ellipse passe une tangente à l'ellipse qui est bissectrice extérieure de l'angle (MF,MF').
- Le symétrique d'un foyer d'une ellipse par rapport à une tangente à l'ellipse est sur le cercle directeur associé. Cette propriété caractérise les tangentes.
- Dans un repère orthonormé porté par les axes de symétrie de l'ellipse $MF+MF' = 2a$, l'équation de cette ellipse est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où $b^2 = a^2-c^2$ ($2c = FF'$).
- L'image d'un cercle par une affinité orthogonale est une ellipse.
- La projection orthogonale d'un cercle sur un plan est une ellipse.

- Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse définie par $MF+MF' = 2a$. Soit O le milieu de FF'. Le **cercle principal** P de l'ellipse est le cercle de centre O de rayon a. Dans l'affinité orthogonale qui applique P sur $\mathcal{E}$, l'image de deux diamètres perpendiculaires de P est formée par deux **diamètres conjugués** de l'ellipse.
- Deux diamètres conjugués d'une ellipse sont tels que chacun est le milieu des cordes parallèles à l'autre.
- **Premier théorème d'Apollonius**
  L'aire du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse est constante.
- **Deuxième théorème d'Apollonius**
  Si M et M' sont les extrémités de deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, on a $OM^2+OM'^2 = a^2+b^2$.
- **Premier théorème de Poncelet**
  Soient P un point extérieur à une ellipse de foyers F et F', PM et PM' les deux tangentes à l'ellipse issues de P. La droite PF est bissectrice de l'angle (FM,FM').
- **Deuxième théorème de Poncelet**
  Soient P un point extérieur à une ellipse de foyers F et F', PM et PM' les deux tangentes à l'ellipse issues de P. Les deux tangentes sont "isogonales" aux droites PF et PF' : c'est-à-dire que $(PM,PF) = (PF',PM')$.

§ 3 L'hyperbole

- Une hyperbole admet deux axes de symétrie orthogonaux et un centre de symétrie.
- Par tout point M d'une hyperbole passe une tangente à l'hyperbole qui est bissectrice intérieure de (MF,MF').
- Le symétrique d'un foyer d'une hyperbole par rapport à une tangente est sur le cercle directeur associé. Cette propriété caractérise les tangentes (ou asymptotes).
- Dans un repère orthonormé porté par les axes de symétrie de l'hyperbole $|MF-MF'| = 2a$, l'équation de cette hyperbole est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ où $b^2 = c^2-a^2$ $(2c = FF')$.
- Une hyperbole admet deux asymptotes dont la réunion a pour équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ dans un repère orthonormé porté par les axes.
- Dans un repère normé porté par les asymptotes à une hyperbole de foyers F et F', l'équation de l'hyperbole est $4xy = c^2$ $(2c = FF')$.
- Soit Δ une sécante à l'hyperbole. On suppose que Δ coupe les asymptotes en M et M', l'hyperbole en P et P'. Alors MM' et PP' ont même milieu.
- **Premier et deuxième théorèmes de Poncelet** : Mêmes énoncés que dans le cas de l'ellipse.

§ 4 La parabole

- La droite passant par le foyer et orthogonale à la directrice est le seul axe de symétrie d'une parabole. Le **sommet** de la parabole est l'intersection de cet axe avec la parabole.
- Une droite Δ est tangente à une parabole si et seulement si la projection du foyer sur Δ est sur la tangente au sommet.
- Une tangente en M à une parabole est bissectrice intérieure de l'angle (MF,Mm) où m est la projection de M sur la directrice. Cette propriété caractérise les tangentes.
- Le symétrique du foyer par rapport à une tangente à une parabole est sur la directrice. Cette propriété caractérise les tangentes.
- Dans un repère orthonormé porté par l'axe de la parabole et la tangente au sommet, l'équation de la parabole est $y^2 = 2px$ ($\frac{p}{2}$ = abscisse du foyer, $x = -\frac{p}{2}$ est l'équation de la directrice).
- **Premier et deuxième théorèmes de Poncelet** : Mêmes énoncés que dans le cas de l'ellipse; toutefois on remplace (PF') par la parallèle à l'axe passant par P.

§ 5 Les théorèmes belges (Dandelin et Quételet)

Soient Γ un cône, P un plan. On désigne par θ le demi-angle au sommet du cône (l'angle de l'axe du cône avec une génératrice), par φ l'angle du plan avec l'axe du cône. On oriente ces angles de telle sorte que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

- La section de P et de Γ est une ellipse si $\varphi > \theta$, une parabole si $\varphi = \theta$, une hyperbole si $\varphi < \theta$.
- Dans le cas d'une conique à centre, il existe deux sphères Σ et Σ' tangentes à Γ et à P. Soient F (resp. F') le point de contact de Σ (resp. Σ') avec P. Alors F et F' sont les foyers de la conique.
- Soient de plus $\mathscr{C}$ le cercle de contact de Σ avec Γ, Q le plan de $\mathscr{C}$, D l'intersection de Q et de P. La conique admet F pour foyer et D pour directrice ; son excentricité est $\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}$.
- Dans le cas de la parabole, il existe une seule sphère Σ tangente à Γ et à P. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de contact de Σ avec Γ, F le point de contact de Σ avec P, D l'intersection du plan de C avec P. La parabole admet D pour directrice et F pour foyer.

VI ÉTUDE ANALYTIQUE DES CONIQUES

§1 La parabole

A) Définition et propriétés élémentaires

Définition: Soient D une droite et F un point non situé sur D, on appelle **parabole de foyer** F **et de directrice** D, l'ensemble P des points M tels que MF = d(M,D). Si l'on note m la projection orthogonale de M sur D, ceci signifie que MF = Mm.

Remarques: La perpendiculaire Δ à D passant par F est un axe de symétrie des données, c'est donc aussi un axe de symétrie de la parabole.

Cet axe de symétrie Δ est appelé l'**axe** de la parabole; il rencontre celle-ci en un seul point, le milieu O de [Ff] . Ce point est appelé le **sommet** de la parabole.

La distance p = Ff du foyer à la directrice est appelée le **paramètre**.

B) Équation cartésienne réduite

Théorème: Dans le repère formé de la parallèle à D passant par O comme axe des x, et de Δ comme axe des y, la parabole P est l'ensemble des points M(x,y) tels que $2py = x^2$.

En effet: M(x,y) est sur P si et seulement si $\sqrt{x^2+(y-\frac{p}{2})^2} = |y+\frac{p}{2}|$; c'est à dire si et seulement si $x^2 + (y-\frac{p}{2})^2 = (y+\frac{p}{2})^2$. Soit , après réduction: $2py = x^2$.

Inversement dans des axes orthonormés toute équation de la forme $y = ax^2$ $(a\neq 0)$ représente une parabole: son foyer a pour coordonnées $(0, \frac{1}{4a})$, sa directrice est la droite d'équation $y = \frac{-1}{4a}$.

Cette équation permet de tracer la courbe P. Elle permet également de montrer l'existence des tangentes et de les tracer.

L'équation générale d'une parabole d'axe parallèle à Oy est : $y = ax^2+bx+c$, puisqu'on se ramène à l'équation précédente par un simple changement d'origine.

C) Tangentes et normales

Théorème: La tangente à la parabole d'équation $2py = x^2$ au point $M(x_0,y_0=\frac{x_0^2}{2p})$, est la droite d'équation $p(y+y_0) = xx_0$.

En effet: La courbe est le graphe de la fonction $x \longmapsto \varphi(x) = x^2/2p$, cette fonction est dérivable, donc la courbe a en M une tangente de pente $\varphi'(x_0) = x_0/p$.

Théorème: La tangente en M est la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{MF},\overrightarrow{Mm})$. Autrement dit la tangente en M, est l'axe de symétrie du triangle isocèle FMm. C'est une construction géométrique de la tangente.

Le triangle FMm étant isocèle, pour prouver le théorème on montre que la tangente en M passe par le milieu I de Fm. Ce milieu a pour coordonnées $(\frac{x_0}{2},0)$; et on connaît l'équation de la tangente …

Constructions de la normale: C'est la bissectrice extérieure de l'angle $(\overrightarrow{MF},\overrightarrow{Mm})$.

Soit μ l'intersection de la normale avec l'axe et m' la projection de M sur l'axe. Les vecteurs $\overrightarrow{M\mu}$ et $\overrightarrow{mF}$ sont égaux, il en résulte que leurs projections sur l'axe sont égales: $\overrightarrow{m'\mu} = \overrightarrow{fF}$; en particulier $m'\mu = p$. Ce qui donne une construction de la normale en M dés que l'on connaît l'axe, M, et le vecteur $\overrightarrow{fF}$.

Comme $mM\mu F$ est un parallélogramme on a $\overrightarrow{mM} = \overrightarrow{F\mu}$, ce qui donne une construction très simple de cette normale. De même $mMFM_1$ est un losange donc $FM_1 = FM = mM = F\mu$; ceci donne une autre construction très simple de la tangente.

Remarque: Le point I est la projection orthogonale de F sur la tangente en M. L'axe des x est la tangente au sommet O; nous venons donc de démontrer que les projections orthogonales du foyer sur les tangentes sont sur la tangente au sommet (ceci caractérise les tangentes). Autre formulation: Une droite d est tangente à la parabole si et seulement si le symétrique du foyer F par rapport à d est sur la directrice D .

§ 2 L'ellipse

A) Définition algébrique

La donnée est un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, et deux nombres a et b tels que $a \geq b > 0$. On considère l'ensemble E des points M(x,y) tels que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (On élimine souvent le cas du cercle où $a = b$).

Il est clair que si M(x,y) est dans E, alors M'(-x,y) et M"(x,-y) sont aussi dans E; donc les deux axes de coordonnées sont des axes de symétrie de E (donc O est un centre de symétrie de E). L'axe Ox rencontre E en deux points A(a,0) et A'(-a,0); l'axe Oy rencontre E en deux points B(b,0) et B'(-b,0). L'ensemble E est appelé l'**ellipse de grand axe** AA' et **de petit axe** BB'.

De façon générale un sous-ensemble E du plan est appelé une **ellipse** s'il existe un repère orthonormé et des nombres $a \geq b > 0$, pour lesquels l'équation de E est : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

B) Figure affine d'un cercle

On considère l'ellipse E ci dessus, et on cherche son image par l'affinité orthogonale φ d'axe Ox et de rapport $r = a/b$. L'image de M(x,y) par φ est le point M'(X=x,Y=ry). Donc $\varphi(E)$ est l'ensemble des points M' tels que $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{r^2b^2} = 1$; ce qui s'écrit aussi tels que $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1$. L'image de E est donc le cercle Γ de diamètre AA'. Ce cercle est appelé le **cercle principal** de l'ellipse. Retenons que E est l'image de ce cercle par l'affinité d'axe AA' et de rapport b/a.

Ceci nous permet de tracer l'ellipse E, comme figure affine du cercle.

<u>Premier point de vue sur les tangentes</u>: Par définition la tangente à une courbe paramétrée (x(t),y(t)) au point M de paramètre t_0 est la droite passant par M et parallèle au vecteur vitesse $(x'(t_0),y'(t_0))$ (s'il est non nul). Nous paramétrons E par $x = a \cos t$ et $y = b \sin t$ (ce qui revient à transformer par φ^{-1} le paramétrage classique du cercle). Donc il existe une tangente en $M(t_0)$, et c'est la droite d'équation:

$$(X - a \cos t_0)(b \cos t_0) - (Y - b \sin t_0)(-a \sin t_0) = bX \cos t_0 + aY \sin t_0 - ab = 0$$

Soit encore $\frac{xx_M}{a^2} + \frac{yy_M}{b^2} = 1$.

Selon un résultat général, puisque E est l'image du cercle Γ par l'application affine φ^{-1}, la tangente à E en M est l'image par φ^{-1} de la tangente à Γ en $\varphi(M)$. Mais il n'est pas nécessaire d'évoquer ce résultat pour montrer que les tangentes à E en M et à Γ en $\varphi(M)$ se coupent sur l'axe Ox, sauf si elles sont toutes deux parallèles à Ox ou Oy (on connaît leurs équations, il suffit de calculer leurs intersections avec Ox). Ce qui donne un tracé simple des tangentes à E. Fig ci-contre.

Les diamètres conjugués: Soit δ une direction de droite, le lieu des milieux des cordes de E de direction δ, est un diamètre de E. Les tangentes aux extrémités de ce diamètre sont parallèles à δ. En effet soit δ' la direction image de δ par φ. Les cordes de E parallèles à δ sont les images par φ^{-1} des cordes de Γ parallèles à δ'. Donc le lieu cherché est l'image par φ^{-1} du lieu des milieux des cordes de Γ parallèles à δ'. Ce dernier est le diamètre PP' perpendiculaire à δ'. Donc le lieu cherché est $\varphi^{-1}(PP')$, c'est à dire
$\varphi^{-1}(P)\varphi^{-1}(P')$ qui n'est (en général) pas perpendiculaire à δ (car l'affinité ne respecte pas l'orthogonalité). Les tangentes en P et P' sont de direction δ', donc leurs images (qui sont les tangentes à l'ellipse) sont de direction δ.

On pourrait montrer (en utilisant φ) que le lieu des milieux des cordes parallèles à PP', est le diamètre de direction δ; c'est ce qui justifie le mot conjugué.

C) Définition monofocale de l'ellipse

Donnons nous une droite D (appelée **directrice**), un point F (appelé **foyer**) non situé sur D, et un nombre e (0<e<1) appelé **excentricité**. Et cherchons le lieu $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que MF = e d(M,D).

Nous ferons un calcul dans les axes orthonormés de la figure ci-contre. Nous noterons d (>0) l'abscisse de F. Alors:

$$M(x,y)\in\mathcal{E} \iff \sqrt{(x-d)^2+y^2} = e\,|x| \iff (x-d)^2+y^2 = e^2x^2$$
$$\iff (x-\frac{d}{1-e^2})^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{d^2\,e^2}{(1-e^2)^2}$$

Prenons pour nouvelle origine le point $O(\frac{d}{1-e^2}, 0)$ et posons $a = \frac{de}{1-e^2}$ et $b = a\sqrt{1-e^2}$ nous obtenons

$$M\in\mathcal{E} \iff \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

Donc E est une ellipse. Son centre O est défini par $\overline{KO} = \frac{1}{1-e^2}\,\overline{KF}$. Les sommets de son grand axe sont définis par $\overline{AF} = e\,\overline{AK}$ et $\overline{A'F} = -e\,\overline{A'K}$.

<u>Remarque</u> : On note que si on pose $c = \sqrt{a^2-b^2}$, on a : $e = \frac{c}{a}$, $d = KF = \frac{b^2}{c}$, $OF = c = eOA'$, $OA' = eOK = a$ et $OK = \frac{a^2}{c}$. En fait d est la distance du foyer à la directrice : le **paramètre** est le nombre $p = ed$.

<u>Réciproquement</u>: Soit une ellipse E dont l'équation réduite (dans des axes (Ox,Oy) donnés) s'écrit: $\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1$ (avec B < A , c'est à dire E n'est pas un cercle), il est possible de la définir par foyer et directrice. En effet posons $e = \frac{\sqrt{A^2-B^2}}{A}$ et $d = \frac{B^2}{\sqrt{A^2-B^2}}$, et définissons (sur Ox) F et K par $\overline{FO} = \sqrt{A^2-B^2}$ et $\overline{KF} = d$. La droite D sera la perpendiculaire en K à Ox . Alors le lieu des points M tels que FM = e.d(M,D) est une ellipse (cf.: le calcul ci-dessus). Le centre Ω de cette ellipse est tel que $\overline{F\Omega} = \frac{de}{1-e^2}$ $= \sqrt{A^2-B^2}$; c'est donc le point O. Son équation dans les axes (Ox,Oy) s'écrira $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$, où $a = \frac{de}{1-e^2} = A$ et $b = \frac{de}{\sqrt{1-e^2}} = B$. C'est donc l'ellipse E.

On a ainsi montré qu'il existe un système foyer-directrice et une excentricité e permettant de définir E. En fait il en existe un second F' (par symétrie par rapport à O). La droite (FF') (c'est à dire la droite perpendiculaire à D passant par F) est **l'axe focal** de E ; elle contient le grand axe [AA'] .

D) Le point de vue bifocal (l'ellipse du jardinier)

Reprenons notre ellipse E et ses deux foyers F et F', et cherchons le lieu E des points M tels que MF + MF' = 2a. Alors (en posant $c = OF = OF' = \sqrt{a^2-b^2}$):

$$
\begin{aligned}
M(x,y)\in E \quad & \Longleftrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a \\
& \Longleftrightarrow [(x-c)^2+y^2] + [(x+c)^2+y^2] + 2\sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 4a^2 \\
& \Longleftrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a^2 - (x^2+y^2+c^2) \\
(\overset{2}{\Longleftarrow}) \quad & \Rightarrow (x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2-2cx) = 4a^4 - 4a^2(x^2+y^2+c^2) + (x^2+y^2+c^2)^2 \\
& \Longleftrightarrow -4c^2x^2 = 4a^4 - 4a^2(x^2+y^2+c^2) \\
& \Longleftrightarrow x^2(a^2-c^2) + y^2a^2 = a^2(a^2-c^2) \\
& \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1
\end{aligned}
$$

Et il reste à justifier l'implication ($\overset{2}{\Longleftarrow}$). La dernière égalité entraîne $x^2 \leq a^2$ et $y^2 \leq a^2-c^2$; et ceci entraine $2a^2 - (x^2+y^2+c^2) \geq 0$; ce qui justifie ce point laissé en suspens.

<u>Conséquence</u>: Si on se donne deux points distincts F et F' et une distance 2a (>FF'), l'ensemble des points M tels que MF + MF' = 2a est une ellipse. Les sommets de son grand axe sont les points de FF' situés à une distance de O (milieu de FF') égale à a. Les sommets de son petit axe sont les points de la médiatrice de FF', situés à la distance a de F et F'. Si F et F' ne sont pas distincts on trouve un cercle de centre F et rayon a .

<u>Réciproquement</u>: Soit une ellipse E dont l'équation réduite (dans des axes (Ox,Oy) donnés) est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Posons $c = \sqrt{a^2-b^2}$, et soit F et F' les points de l'axe Ox qui sont à une distance c de l'origine. Alors le lieu des points M tels que MF+MF' = 2a est (d'après le calcul ci-dessus) l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$. Puisque $a^2-c^2 = b^2$, c'est l'ellipse E. Ainsi toute ellipse peut être définie de façon bifocale.

<u>Deuxième point de vue sur les tangentes</u>:

Considérons un paramétrage de l'ellipse tel que le vecteur vitesse ne s'annule jamais (par exemple celui que nous avons vu ci-dessus). La relation FM(t) + F'M(t) = 2a peut aussi s'écrire $\sqrt{\overrightarrow{FM(t)}^2} + \sqrt{\overrightarrow{F'M(t)}^2} = 2a$. D'où par dérivation:

$$\frac{\overrightarrow{FM(t)}.\frac{\overrightarrow{dM(t)}}{dt}}{\sqrt{\overrightarrow{FM(t)}^2}} + \frac{\overrightarrow{F'M(t)}.\frac{\overrightarrow{dM(t)}}{dt}}{\sqrt{\overrightarrow{F'M(t)}^2}} = 0$$

Ce qui s'écrit aussi $(\vec{u} + \vec{v}) . \frac{\overrightarrow{dM(t)}}{dt} = 0$, où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs obtenus en normant $\overrightarrow{FM(t)}$ et $\overrightarrow{F'M(t)}$. Cette relation exprime donc que $\frac{\overrightarrow{dM(t)}}{dt}$ est porté par la bissectrice extérieure des rayons vecteurs.

<u>Conséquence</u> (propriétés optiques de l'ellipse) Un miroir est dit elliptique si c'est une portion de la surface obtenue en faisant tourner une ellipse E autour de son grand axe. Un tel miroir

réfléchit tous les rayons passant par le foyer F en des rayons
passant par F'.

Exercice: α) Montrer que le symétrique de F par rapport à la tangente T_M en M est à une distance de F' égale à 2a. En déduire que les projections des foyers sur les tangentes sont sur le cercle principal.

β) Soit δ une direction, montrer que l'ellipse a exactement deux tangentes de direction δ.

γ) Soit D une droite, montrer que si la projection de F sur D est un point du cercle principal Γ, alors D est tangente à l'ellipse. Construire le point de contact.

δ) Soit P un point du plan, donner une construction des tangentes à l'ellipse passant par P (s'il en existe).

Solution : Soit μ le symétrique de F par rapport à T_M. Puisque T_M est la bissectrice extérieure de MF et MF', les points F', M et μ sont alignés dans cet ordre. Donc $F'\mu=F'M+M\mu=2a$. Il en résulte que μ est sur le cercle $C_{F'}$ de centre F' et de rayon 2a (cercle directeur), et que le cercle de centre M passant par F est tangent en μ à $C_{F'}$;de plus la projection m de F sur T_M est sur l'homothétique de $C_{F'}$ dans l'homothétie de centre F et de rapport 1/2, c'est le cercle principal Γ.

Pour démontrer β on remarque que dans le paramétrage classique, le vecteur vitesse au point M_t est $\vec{V}(-a.\sin t, b.\cos t)$, et que, $\vec{W}$ étant donné, il existe exactement 2 valeurs de t pour les quelles ce vecteur est parallèle à $\vec{W}$. (On peut aussi utiliser la partie B).

Pour γ on remarque qu'il y a exactement deux droites qui sont parallèles à D et telles que la projection de F sur ces droites soit située sur Γ. Il y a aussi exactement deux tangentes parallèles à D. D'après α, ce sont les mêmes. Le point de contact est l'intersection de D avec le segment joignant F' au symétrique de F par rapport à D .

Pour δ: pour construire une tangente passant par P, nous chercherons le symétrique μ de F par rapport à cette tangente; il est sur le cercle de centre F' et de rayon 2a; il est aussi sur le cercle de centre P passant pas F. Il y a 0, 1 ou 2 solutions. (on peut aussi utiliser la partie B)

§ 3 L'hyperbole

A) Définition algébrique

Étant donnés un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, et deux nombres a et b (positifs), on considère l'ensemble H des points M(x;y) tels que $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Il est clair que si M(x,y) est dans H, alors M'(-x,y) et M"(x,-y) sont aussi dans H; donc les deux axes de coordonnées sont des axes de symétrie de H (donc O est un centre de symétrie de H). L'axe Ox rencontre H en deux points A(a,0) et A'(-a,0); l'axe Oy ne rencontre pas H. L'ensemble H est appelé une **hyperbole**, son **centre** est O , son **axe focal** est Ox et son **axe non focal** est Oy .

De façon générale un sous-ensemble H du plan est appelé une **hyperbole** s'il existe un repère orthonormé et des nombres a et b (>0), tels que H soit l'ensemble des points M(x,y) tels que $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

<u>Un changement de repère</u>: Posons $\vec{I} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ et $\vec{J} = a\vec{\imath} - b\vec{\jmath}$, nous obtenons un nouveau repère (non orthogonal si a≠b) $(O, \vec{I}, \vec{J})$ dans lequel les coordonnées du point M(x,y) sont : $X = \frac{1}{2}(\frac{x}{a} + \frac{y}{b})$ et $Y = \frac{1}{2}(\frac{x}{a} - \frac{y}{b})$. Donc dans ce nouveau repère H a pour équation XY = 1/4. Ceci nous donne un tracé de H; il suffit de représenter la fonction $X \to \frac{1}{4X}$ dans ce repère. On voit ainsi que les deux axes du nouveau repère sont des asymptotes; dans l'ancien repère elles ont comme équations $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$.

<u>Premier point de vue sur les tangentes</u> (Notons d'abord que la recherche des tangentes peut se faire en repère non orthonormé). La fonction $X \to \frac{1}{4X}$ est dérivable de dérivée $X \to \frac{-1}{4X^2}$, donc la courbe a une tangente au point (X_0,Y_0), et celle ci a pour équation $Y - Y_0 = \frac{-1}{4X_0^2}(X - X_0)$. Ce qui donne $XY_0 + YX_0 = 1/2$. Dans le repère initial la tangente en $M(x_0,y_0)$ s'écrit $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

<u>Exercice</u>: α) Montrer que si une droite D coupe H en Q et Q' et ses asymptotes en P et P', alors PP' et QQ' ont même milieu.

β) Montrer que la tangente en un point M de H coupe les asymptotes en deux points P et P' symétriques par rapport à M.

En effet la droite D s'écrit Y = AX+B avec A≠0 (sinon elle ne couperait pas les deux asymptotes). Les abscisses de Q et Q' sont données par l'équation X(AX+B) = 1/4. Donc le milieu I de QQ' est le point $(\frac{-B}{2A}, A(\frac{-B}{2A})+B) = (\frac{-B}{2A}, \frac{B}{2})$. Les points P et P' sont (0,B) et $(\frac{-B}{A}, 0)$. D'où le résultat α. Pour β on cherche les intersections de $XY_0+YX_0= 1/4$ et des asymptotes.

Ces considérations mènent aussi aux **diamètres conjugués**, c'est à dire à la recherche du lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée δ (non parallèle à une asymptote). Le lieu du milieu de PP' est une droite (c'est facile, c'est un exercice sur l'homothétie); d'après α le lieu du milieu de QQ' est le même, aux problèmes liés à l'existence de Q et Q' près. On trouve soit une droite, soit deux demi droites alignées (les tangentes à leurs extrémités étant de direction δ).

B) Le point de vue monofocal

Donnons nous une droite D (appelée **directrice**), un point F (appelé **foyer**) non situé sur D, et un nombre e (e>1 appelé **excentricité**). Cherchons le lieu $\mathcal{H}$ des points M du plan tels que MF=e d(M,D). Nous ferons un calcul dans les axes orthonormés de la figure ci-contre. Nous noterons d (ou p) l'abscisse de F. Alors:

$$M(x,y)\in\mathcal{H} \iff \sqrt{(x-d)^2+y^2} = e\,|x| \iff (x-d)^2+y^2 = e^2x^2$$

$$\iff \left(x - \frac{d}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{d^2\,e^2}{(1-e^2)^2}$$

Prenons pour nouvelle origine le point $O(\frac{d}{1-e^2}, 0)$ et posons $a = \left|\frac{de}{e^2-1}\right|$ et $b = a\sqrt{e^2-1}$ nous obtenons

$$M(X,Y)\in\mathcal{H} \iff \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

Donc $\mathcal{H}$ est une hyperbole. Son centre O est défini par $\overline{KO} = \frac{1}{1-e^2}\,\overline{KF}$. Les **sommets** de son axe sont définis par $\overline{AF} = e\,\overline{AK}$ et $\overline{A'F} = -e\,\overline{A'K}$.

<u>Remarque</u>: On note $c = \sqrt{a^2+b^2} = OF$ et ainsi on a $e = \frac{c}{a}$. Le **paramètre** est le nombre $p = e|d| = \frac{b^2}{a}$ où $|d| = \frac{b^2}{c}$ est la distance du foyer à la directrice. On a $OF = eOA = c$, $OA = eOK = a$ et $OK = \frac{a^2}{c}$.

<u>Inversement</u> si on se donne une hyperbole H définie par une équation $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$, il est possible de la définir par foyer et directrice. Pour nous en convaincre nous poserons $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$, et nous définirons (sur l'axe Ox) F par $\overline{OF} = \varepsilon\sqrt{a^2+b^2}$ (où $\varepsilon = \pm 1$) et K par $\overline{OK}.\overline{OF} = a^2$ (d'où il résulte que $\overline{FK} = d = \frac{-\varepsilon b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$). La droite D étant la perpendiculaire en x à Ox, le lieu des points M tels que FM = e d(M,D) est une hyperbole (cf.: ci-dessus) ; c'est l'hyperbole donnée. Cela résulte du fait que (avec les valeurs de e et de d ainsi choisies) on a $\left|\frac{de}{1-e^2}\right| = a$, $\left|\frac{de}{\sqrt{e^2-1}}\right| = b$ et du fait que son centre est le point Ω défini par $\overline{K\Omega} = \frac{d}{1-e^2} = \overline{KO}$ (vérifications faciles).On a donc montré qu'il existe deux (puisque ε peut prendre la valeur +1 ou -1) systèmes foyer-directrice permettant de définir H. Ils sont symétriques par rapport à O. La droite (AA') (c'est à dire la droite perpendiculaire à D passant par F) contient les deux foyers : c'est l'axe focal.

C) Le point de vue bifocal

Reprenons notre hyperbole H et ses deux foyers F et F', et cherchons le lieu H des points M tels que $|MF - MF'| = 2a$. Alors:

$$M(x,y)\in H \iff \left|\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a$$
$$\iff (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2$$
$$\iff 2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2(-2a^2 + c^2 + x^2 + y^2)$$
$$(\overset{?}{\Leftarrow})\Rightarrow \left[(x+c)^2+y^2\right]\left[(x-c)^2+y^2\right] = (x^2+y^2+c^2-2a^2)^2$$
$$\iff \big((x^2+y^2+c^2)+2cx\big)\big((x^2+y^2+c^2)-2cx\big) = \big((x^2+y^2+c^2)-2a^2\big)^2$$
$$\iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (\text{où } b^2 = c^2 - a^2)$$

Et il reste à justifier le $(\overset{?}{\Leftarrow})$. La dernière égalité entraine $|x| \geq a$; et ceci implique $x^2+y^2+c^2-2a^2 = x^2+y^2+b^2-a^2 \geq 0$, ce qui justifie le point laissé en suspens.

<u>Conséquence</u>: Si on se donne deux points F et F' et une distance 2a (<FF'), l'ensemble des points M tels que $|MF - MF'| = 2a$ est une hyperbole. Les sommets de son axe sont les points de FF' situés à une distance de O (milieu de FF') égale à a.

<u>Réciproquement</u> toute hyperbole définie par une équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, peut être définie ainsi; il suffit de prendre pour F et F' les points de Ox situés à la distance $\sqrt{a^2+b^2}$ de O.

<u>Deuxième point de vue sur les tangentes</u>:

Considérons un paramétrage de l'hyperbole tel que le vecteur vitesse ne s'annule jamais (par exemple celui qui est donné par l'équation XY = 4). La relation $|FM(t) - F'M(t)| = 2a$ peut aussi s'écrire $\left|\sqrt{\overrightarrow{FM(t)}^2} - \sqrt{\overrightarrow{F'M(t)}^2}\right| = 2a$. D'où par dérivation:

$$\frac{\overrightarrow{FM(t)}.\frac{\overrightarrow{dM(t)}}{dt}}{\sqrt{\overrightarrow{FM(t)}^2}} - \frac{\overrightarrow{F'M(t)}.\frac{\overrightarrow{dM(t)}}{dt}}{\sqrt{\overrightarrow{F'M(t)}^2}} = 0$$

Ce qui s'écrit aussi $(\vec{u} - \vec{v}) . \frac{\overrightarrow{dM(t)}}{dt} = 0$, où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs obtenus en normant $\overrightarrow{FM(t)}$ et $\overrightarrow{F'M(t)}$. Cette relation exprime donc que $\frac{\overrightarrow{dM(t)}}{dt}$ est porté par la bissectrice intérieure des rayons vecteurs.

<u>Conséquence</u> (propriétés optiques de l'hyperbole) Un miroir est dit hyperbolique si c'est une portion de la surface obtenue en faisant tourner une hyperbole H autour de son axe focal. Un tel miroir réfléchit tous les rayons passant par le foyer F en des rayons passant par F'(virtuellement).

<u>Exercice</u>: α) Montrer que le symétrique de F par rapport à la tangente T_M en M est à une distance de F' égale à 2a. En déduire que les projections des foyers sur les tangentes sont sur le cercle principal Γ (c'est à dire le cercle de diamètre AA').

β) Montrer que si la projection de F sur la droite D est un point du cercle principal Γ, alors D est soit une tangente, soit une asymptote de l'hyperbole. Si c'est une tangente construire le point de contact.

γ) Soit P un point du plan, donner une construction des tangentes à l'hyperbole passant par P (s'il en existe).

Solution: Soit μ le symétrique de F par rapport à T_M. Puisque T_M est la bissectrice intérieure de MF et MF', les points F', μ et M sont alignés (dans cet ordre, ou dans l'ordre μ,F',M). Donc $F'\mu = |F'M - M\mu| = 2a$. Il en résulte que μ est sur le cercle $C_{F'}$ de centre F' et de rayon 2a (cercle directeur), et que le cercle de centre M passant par F est tangent à ce cercle directeur ; de plus la projection m de F sur T_M est sur l'homothétique de $C_{F'}$ dans l'homothétie de centre F et de rapport 1/2, c'est le cercle Γ. Pour démontrer β notons δ le symétrique de F par rapport à D (il est sur $C_{F'}$) et Δ l'intersection de D et de δF'(si elle existe ! Sinon D passe par O et est une asymptote). Les points F et F' sont de part et d'autre de D (pour s'en convaincre on montre que D coupe le segment FF'), donc F' et δ sont du même coté de D; et ainsi l'égalité

$-\delta F' = 2a$ implique $|\Delta F' - \Delta F| = 2a$, c'est à dire que Δ est sur l'hyperbole. On démontre alors facilement que la tangente en Δ est D. Pour construire les tangentes passant par P, nous chercherons des droites D passant par P telles que la projection de F sur D soit un point du cercle Γ; nous les trouvons en prenant l'intersection de Γ et du cercle γ_P de diamètre FP.

§ 4 Paramétrage général des coniques en coordonnées polaires

On prend une conique (définition monofocale) de foyer (0,0) , d'excentricité e et de directrice D d'équation $x = x_o > 0$. L'équation est donc $x^2 + y^2 = e^2(x-x_0)^2$ i.e. $r = \pm e(r\cos\theta - x_0)$. Mais rajouter π à θ tout en changeant r en -r (ce qui ne change pas le point ni $r\cos\theta$) permet de changer le signe ± , on peut donc choisir le signe - .

Et alors l'équation devient : $r = \dfrac{ex_0}{1 + e\cos\theta}$.

Le nombre x_0 est la distance du foyer à sa directrice, donc ex_0 est le **paramètre** p de la conique. Enfin si on suppose que la directrice n'est pas forcément verticale, on obtient l'équation la plus générale: $r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$.

Sur cette dernière équation, en faisant e = 0 et p = R , on retrouve l'équation d'un cercle.

En fait toute équation de la forme $\dfrac{1}{r} = u + v\cos\theta + w\sin\theta$ (avec $u \neq 0$) est l'équation d'une conique de foyer l'origine.

§ 5 L'équation générale des coniques

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, considérons l'ensemble Γ des points M(x,y) tels que: $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$.

Nous allons voir que Γ est en général une conique (si a,b et c ne sont pas tous nuls).

<u>Première réduction de l'équation</u>: On vérifie que $ax^2 + 2bxy + cy^2$ est l'unique coefficient de la matrice $(x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Or la matrice symétrique $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ s'écrit $S = H^{-1}\Delta H$, où $H = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale et $\Delta = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ une matrice diagonale (avec A ou B $\neq 0$) . Ainsi :

$(ax^2 + 2bxy + cy^2) = (x,y)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2) = (\alpha x-\beta y,\beta x+\alpha y)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha x-\beta y \\ \beta x+\alpha y \end{pmatrix}$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = A(\alpha x-\beta y)^2 + B(\beta x+\alpha y)^2$$

Mais $X=\alpha x-\beta y$ et $Y=\beta x+\alpha y$ sont les coordonnées de M dans un nouveau repère orthonormé $(O,\vec{I},\vec{J})$. Dans ce repère Γ a une équation de la forme:

$$AX^2 + BY^2 + 2DX + 2EY + F = 0$$

<u>Deuxième réduction de l'équation</u>: Si B = 0 (et A $\neq 0$) donc $AB = ac-b^2=0$, l'équation se réduit à

$$AX^2 + 2DX + 2EY + F = 0.$$

Si $E\neq 0$, Γ est une <u>parabole</u>. Si B=0, on obtient deux droites, une droite, ou l'ensemble vide.

De même si A = 0 et B $\neq 0$.

On suppose maintenant A et B $\neq 0$ (i.e. $AB = ac-b^2\neq 0$) et au moins un positif.

<u>Si</u> A <u>et</u> B <u>sont positifs</u> (ie $AB=ac-b^2>0$), l'équation s'écrit $A(X+\frac{D}{A})^2 + B(Y+\frac{E}{A})^2 + (F - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{A}) = 0$. Par changement d'origine, on se ramène à $A\xi^2 + B\psi^2 = F_1$. Ce qui donne une <u>ellipse</u> (ou un cercle) si F_1 est positif. Si F_1 est nul, Γ se réduit à un point. Si $F_1 <0$, Γ est vide.

<u>Si</u> A <u>et</u> B <u>sont de signes contraires</u> (ie $AB=ac-b^2<0$), une écriture analogue de l'équation, nous donne une <u>hyperbole</u> si F_1 est non nul (si F_1 est nul, Γ est formé de deux droites sécantes).

<u>Remarque</u>: Une application affine transforme une conique en une conique: plus précisément l'image d'une parabole (resp. ellipse, hyperbole) est une parabole (resp. ellipse, hyperbole) à condition d'admettre qu'un cercle est une ellipse (d'excentricité 0).

Réciproquement deux paraboles (resp. ellipses, hyperboles) sont transformées l'une de l'autre par une transformation affine et on peut supposer que cette transformation est une similitude (ou une isométrie) si et seulement si les excentricités (ou les excentricités et les paramètres) sont égales (ou égaux).